

М. Дейвисон



МНОГОМЕРНОЕ
ШКАЛИРОВАНИЕ

**МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ ЗА РУБЕЖОМ**



MULTIDIMENSIONAL SCALING

Mark L. Davison

University of Minnesota

JOHN WILEY & SONS =

New York · Chichester · Brisbane · Toronto · Singapore

М. Дэйвисон

МНОГОМЕРНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ

МЕТОДЫ НАГЛЯДНОГО
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ

Перевод с английского
В.С. Каменского



МОСКВА «ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА» 1988

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ ЗА РУБЕЖОМ

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам.
2. Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений.
3. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 1 и 2.
4. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров.
5. Болч Б. У., Хуань К. Д. Многомерные статистические методы для экономики.
6. Иберла К. Факторный анализ.
7. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии.
8. Хейс Д. Причинный анализ в статистических исследованиях.
9. Пуарье Д. Эконометрия структурных изменений.
10. Драймз Ф. Распределенные лаги.
11. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. Вып. 1 и 2.
12. Бикел П., Доксам К. Математическая статистика. Вып. 1 и 2.
13. Лиммер Э. Статистический анализ неэкспериментальных данных.
14. Песаран М., Слейтер Л. Динамическая регрессия: теория и алгоритмы.
15. Дидэ Э. и др. Методы анализа данных.
16. Бартоломью Д. Стохастические модели социальных процессов.
17. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн. 1 и 2.
18. Хеттманспергер Т. Статистические выводы, основанные на рангах.

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ

Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствия.

Редколлегия: А. Г. Аганбегян,
С. А. Айвазян, Ю. П. Адлер,
Б. В. Гнеденко, Ю. Н. Благовещенский,
Э. Б. Ершов, Е. М. Четыркин

© 1983 by John Wiley
& Sons, Inc.

© Перевод на русский язык,
предисловие, дополнительная
литература, приложение,
«Финансы и статистика», 1988

Д 0702000000—003 99—87
010(01)—88

ISBN 5—279—00276—3

Благодаря стремительному развитию вычислительной техники в последние годы резко расширился круг специалистов, которым в ходе решения стоящих перед ними задач приходится перерабатывать огромные массивы информации. Если раньше это были инженеры, технологи, медики, психологи, экономисты, социологи, то теперь в их число входят руководители проектных и промышленных организаций, управленческие и плановые работники во всех звеньях народного хозяйства. И довольно часто им приходится иметь дело с информацией, полученной от экспертов (испытуемых), отображающей, например, разнообразие точек зрения на такие объекты, как качество продукции, проекты решения научно-технических или социально-экономических проблем, реакция индивидуумов на те или иные тесты (воздействия) и т. п. В подобных ситуациях для систематизации, упорядочения и статистического анализа имеющейся информации специалисты прибегают к помощи методов, объединяемых под названием *многомерного шкалирования*.

Предлагаемая вниманию читателя книга М. Дэйвисона «Многомерное шкалирование. Методы наглядного представления данных» знакомит читателя с этими методами. Что же такое многомерное шкалирование? Можно определить многомерное шкалирование как *математический инструментальный, предназначенный для обработки данных о попарных сходствах, связях или отношениях между анализируемыми объектами с целью представления этих объектов в виде точек некоторого координатного пространства*. Таким образом, входная информация для задачи многомерного шкалирования — сведения о попарных сходствах или связях анализируемых объектов (индивидуумов, семей, предприятий, отраслей и т. п.), а выходная — приписанные каждому из объектов числовые значения координат в некоторой вспомогательной (найденной в процессе решения задачи) координатной системе.

Многомерное шкалирование представляет собой один из разделов *прикладной статистики* — научной дисциплины, разрабатывающей и систематизирующей понятия, приемы, математические методы и модели, предназначенные для организации сбора, стандартной записи, систематизации и обработки (в том числе с помощью ЭВМ) статистических данных с целью их удобного лаконичного представления, интерпретации и получения научных и практических выводов.

Характеризуя прикладную статистику (или *анализ данных, понимаемый в широком смысле*) как область исследований, следует сказать, что до последнего времени теория, методология и практика статистической обработки информации развивались, по существу, в двух направлениях. Одно из них представлено методами, предусматривающими возможность *вероятностной интерпретации* обрабатываемых данных и полученных в результате их обработки выводов. Эту систему понятий, определений и методов принято относить к *математической статистике*. Другое направление (логико-алгебро-геометрическое) представлено методами так называемого *анализа данных, понимаемого в узком смысле*. Логическая схема этих методов следующая: подлежащие статистической обработке данные не могут интерпретироваться как выборка из генеральной совокупности, и, следовательно, использование вероятностных моделей при построении и выборе наилучших методов статистической обработки и последующая вероятностная интерпретация статистических выводов становятся неправомерными; из множества статистических методов, реализующих поставленную цель статистической обработки данных, наилучший метод, как правило, выбирается с помощью оптимизации некоторого экзогенно заданного критерия (*функционала качества метода*) (см. [Айвазян и др., 1983, с. 34—41]).

Многомерное шкалирование — инструментарий, развиваемый в рамках второго направления*. В качестве оптимизируемого критерия качества метода в нем используется просуммированная по всем парам объектов мера отличия *исходных* (заданных) характеристик попарной близости объектов от соответствующих характеристик, вычисленных в терминах *искомых* координат объектов (см., например, меру соответствия F в алгоритме Торгерсона, гл. 4).

Для решения каких именно прикладных задач привлекаются методы многомерного шкалирования? В каких ситуациях оказывается полезным (а подчас необходимым) «погружение» анализируемых объектов, о которых известны лишь структура их попарных взаимных расстояний (мер сходства), в некоторое специально подобранное координатное пространство небольшой размерности?

Выделим три основных типа таких задач (наша классификация примерно соответствует той, которая приводится М. Дэйвисоном в гл. 1).

* Выделение в рамках прикладной статистики методов *математической статистики и анализа данных (в узком смысле)* хоть и отражает фактически сложившуюся ситуацию, но является, конечно, условным. Фак, если в многомерном шкалировании принять дополнительно некоторые априорные допущения о вероятностной природе обрабатываемых исходных характеристик попарной близости (различия, связи) анализируемых объектов, то для решения поставленной задачи придется воспользоваться методами математической статистики (см., например, оценки максимального правдоподобия для координат объектов в алгоритме Рамсея, гл. 4).

1. *Поиск и интерпретация латентных (т. е. скрытых, непосредственно не наблюдаемых) переменных, объясняющих заданную структуру попарных расстояний (связей, близостей).* Этот тип задач многомерного шкалирования предусматривает не только построение вспомогательных шкал (координатных осей), в системе которых затем рассматриваются анализируемые объекты, но и *содержательную интерпретацию* этих шкал в качестве вполне определенных характеристик стимулов, существенных для дифференциации объектов в рассматриваемом смысле. В такой постановке конечные прикладные цели многомерного шкалирования, по существу, не отличаются от задач, для решения которых привлекается *факторный, компонентный и латентно-структурный анализ* (разница — в форме задания исходной информации).

2. *Верификация геометрической конфигурации системы анализируемых объектов в координатном пространстве латентных переменных.* Речь идет о ситуациях, в которых исходя из некоторых содержательных (теоретических) соображений, относящихся к «физическому» механизму изучаемого явления, формулируются гипотезы о размерности пространства латентных переменных и о типе геометрической конфигурации системы точек, представляющих анализируемые объекты в этом пространстве. Результатом применения многомерного шкалирования в задачах этого типа является статистическая проверка (верификация) упомянутых гипотез, их уточнение.

3. *Сжатие исходного массива данных с минимальными потерями в их информативности.* Если число анализируемых объектов n велико (порядка нескольких сотен, тысяч и т. д.), то исходные данные представляются квадратной матрицей попарных близостей *большой размерности* ($n \times n$). Решение задачи многомерного шкалирования позволяет перейти от формы исходных данных типа «объект — объект» к более распространенной и удобной для статистической обработки форме исходных данных типа «объект — свойство», одновременно сократив объем массива исходных данных с $n \times n$ до $n \times k$, где k — небольшое число латентных переменных, объясняющих дифференциацию объектов (k , размерность вспомогательного пространства, обычно намного меньше числа n).

Необходимо подчеркнуть одно очень важное свойство многомерного шкалирования: независимо от того, какого типа задача решается, его всегда можно использовать как *инструмент наглядного представления (визуализации) исходных данных*. Действительно, выбирая величину k (размерность вспомогательного пространства) равной 1, 2 или 3, мы решаем задачу представления наших объектов в виде точек на числовой прямой, на плоскости или в трехмерном пространстве. Характерная особенность такого наглядного представления данных состоит в том, что большие массивы информации, визуализированных и выведенных на дисплей ЭВМ, анализируются человеком. Поэтому процесс построения наглядного представления развивается как *процесс диалога между ЭВМ и человеком*, в котором человек отмечает на «картинках»

(например, на гистограмме, дендрограмме или корреляционном поле) интересующие его явления, а машина предлагает новые варианты «картинок», полученные на основе различных методов и моделей. Многомерное шкалирование располагает большим запасом методов и моделей для визуального представления сложной многомерной информации.

В книге М. Дэйвисона описываются только некоторые из этих методов и моделей, наиболее простые и наиболее широко распространенные. Знакомство с ними и приобретение опыта их практического применения необходимы каждому, кто приступает к систематическому изучению этого аппарата. Для продолжения изучения многомерного шкалирования после прочтения книги М. Дэйвисона можно рекомендовать работу [Терехина, 1986], где детально рассмотрены многие методы многомерного шкалирования. Большое внимание уделяется, в частности, проблеме понижения размерности *числовых* данных, т. е. *матрическому* многомерному шкалированию. Подробное изложение ряда технических вопросов отличает работу А. Ю. Терехиной от настоящей книги.

В настоящее время распространение методов шкалирования сдерживается, с одной стороны, тем, что имеющиеся программы пригодны для анализа лишь небольших объемов информации, а с другой стороны, тем, что эти методы носят сугубо приближенный характер. Преодолеть эти трудности иногда позволяет матричный подход, основанный на представлении решения задачи многомерного шкалирования в виде собственных векторов некоторых матриц (для данных о близости, которым посвящены гл. 4—5 книги М. Дэйвисона, матричный подход описан в [Guttman, 1968]), для данных о предпочтении, которым посвящена гл. 7, матричный подход рассмотрен в [Каменский, 1979a]). Можно надеяться, что благодаря внедрению этого подхода многомерное шкалирование станет применяться для обработки больших массивов информации так же часто, как факторный, кластерный или регрессионный анализ.

В приложении к книге М. Дэйвисона приведена программа многомерного шкалирования PARSUN. Ее можно использовать для решения задач из гл. 4, 5 и 7. (Для решения многих задач, включенных в книгу, могут потребоваться и другие программы, в частности программы регрессионного анализа, матричной алгебры и т. п. Ссылки на работы, содержащие тексты таких программ на Фортране, приведены в примечаниях переводчика. Кроме того, такие программы есть во многих вычислительных центрах. Сведения об этих программах содержатся в последних главах книг [Айвазян и др., 1983, 1985].)

Следует обратить внимание на то, что при анализе экспертной информации исследователь сталкивается с проблемой многокритериальности. Экспертиза часто связана с выявлением различных точек зрения, формированием общей точки зрения и т. п. Для решения таких

задач существуют модели многомерного шкалирования, позволяющие при анализе эмпирической информации выявить «идеальные» объекты, определяющие оценки реальных объектов (этому посвящена гл. 7 книги М. Дэйвисона; программа PARSUN дает возможность обрабатывать данные в соответствии с моделью «идеальных» объектов). Наглядное представление данных в отличие от известных способов свертывания многих критериев предназначено не столько для поиска компромисса, сколько для выявления существенно разных точек зрения. А эта задача в подобных исследованиях является ключевой.

В последние годы в СССР широко проводятся исследования по стандартизации методик управления в системах, включающих человека. Наряду с экспертами в таких системах участвует так называемое лицо, принимающее решение (ЛПР). Это может быть главный синоптик, если речь идет о комплексном прогнозе погоды, или главный конструктор, если определяется техническая политика, или проводящий консилиум врач. Успех взаимодействия специалистов и ЛПР зависит, как правило, от наглядности представления информации и от такого ее сжатия (лаконизации), при котором происходят минимальные потери информативности. Сказанное свидетельствует о том, что область приложений многомерного шкалирования много шире, чем та, где эти методы уже используются.

Книга М. Дэйвисона предназначена для двух категорий читателей. К первой из них относятся специалисты-прикладники, заинтересованные в наглядном представлении данных. Познакомившись с книгой М. Дэйвисона, специалист-прикладник, даже не имеющий подготовки в области математики и методов анализа данных, сможет оценить возможности многомерного шкалирования, целесообразность его применения на практике. Вторая категория читателей — математики и программисты, занимающиеся анализом данных. Книга М. Дэйвисона поможет им расширить набор применяемых методов, пользоваться готовыми программами, разрабатывать новые алгоритмы и программы, ориентироваться в литературе, освещающей теоретические и прикладные проблемы многомерного шкалирования.

*С. А. АЙВАЗЯН,
В. С. КАМЕНСКИЙ*

● ПРЕДИСЛОВИЕ

При чтении курса многомерного шкалирования (МШ) очень трудно подобрать для студентов единый, связный и исчерпывающий набор первоисточников. Поэтому мною и было принято решение написать эту книгу. Я преследовал три цели: показать, что такое многомерное шкалирование, объяснить, как использовать основные методы, и подготовить исследователей к чтению литературы, освещающей алгоритмы многомерного шкалирования. Книга предназначена служить справочником для статистиков, а также для студентов, специализирующихся в области социологии и науках о поведении. Чтобы помочь преподавателям, в конце всех глав, кроме последней, приведены задачи и ответы к ним.

Я попытался проиллюстрировать применение каждого из методов многомерного шкалирования примерами двух типов: гипотетические примеры, придуманные специально для описания основных особенностей метода, и реальные примеры, взятые из опубликованных работ. Они относятся к различным областям, в том числе к акустике, педагогике, психологии и социологии. Лучше, чем любые объяснения, которые мог бы дать я, эти примеры показывают, что такое многомерное шкалирование и почему оно так важно.

В книге нет краткого описания каждого метода, подходящего под определение многомерного шкалирования. Изложение материала сконцентрировано на основных методах. Это дало возможность без чрезмерного увеличения объема книги полнее представить методы, шире проиллюстрировать их применение и подробно остановиться на возникающих проблемах.

В книге многомерное шкалирование определяется как набор многомерных статистических методов оценки параметров различных пространственных дистанционных моделей для данных о близости и методов оценки соответствия этих моделей данным. Такое определение уже, чем определение, не ограничивающее термин «многомерное шкалирование» методами, основанными на пространственных дистанционных моделях. Более широкое определение включало бы факторный и кластерный анализ. Я предпочел более узкое определение МШ, чтобы не включать описание старых областей и иметь возможность более подробно рассмотреть те методы, которые не представлены полностью в других работах.

В гл. 7 обсуждаются методы анализа данных о предпочтении, но только те из них, которые подходят под приведенное выше определение МШ. Существуют различные методы анализа данных о предпочтении, часто включаемые в МШ, но они являются лишь вариантами факторного анализа, примененными не к коэффициентам корреляции, а к данным о предпочтениях. Я решил исключить эти методы, так как их математические основы широко освещены в работах по факторному анализу.

Предполагается, что читателю хорошо известны часто применяемые в науках о поведении и социологии статистические методы, включая множественную регрессию. В первой и последней главах книги упоминается факторный и кластерный анализ, но для того, чтобы понять указанные главы, знать эти методы не обязательно. Математического анализа в книге нет. Надеюсь, что читатель знаком по крайней мере с одним из пакетов программ, используемых в социологии и науках о поведении. Для решения приведенных в книге задач необходимо воспользоваться этим пакетом или какой-либо общедоступной программой многомерного шкалирования*.

Гл. 1 представляет собой краткое введение в МШ. Она описывает источники МШ в экспериментальной психологии и типы исследовательских проблем, для решения которых пригодно многомерное шкалирование.

Без знания основ матричной алгебры исследователь не может читать большинство работ, посвященных МШ. Поэтому гл. 2 дает краткое введение в матричную алгебру. Однако, для того чтобы не сделать эту главу слишком обременительной для несклонных к математике читателей, обсуждаются только те понятия матричной алгебры, без которых практически невозможно обойтись при знакомстве с литературой по МШ. Все такие понятия, встречающиеся в книге, в этой главе объяснены.

Авторы многих работ просто описывают, как многомерное шкалирование применяется для анализа собранных данных. Исследователям-прикладникам, однако, необходима информация о том, как планировать исследования с применением МШ и собирать данные. Эти вопросы освещены в гл. 3.

В гл. 4—7 показано, как применять основные методы МШ и интерпретировать результаты. В них содержатся также доказательства теорем и описания алгоритмов. Этот материал желающие могут опустить без потери связности изложения. Такие разделы отмечены звездочками.

* Для решения задач многомерного шкалирования читатель может обратиться к программе PARSUN (см с. 237), а для решения других задач — к программам, приведенным в работах, ссылки на которые содержатся в примечаниях переводчика, или к программам, имеющимся во многих советских вычислительных центрах (сведения о таких программах можно найти в последних главах справочных изданий [Айвазян и др., 1983, 1985]). — *Примеч. пер.*

В гл. 8 объяснено, как применять МШ для формальной проверки гипотез и как сравнивать результаты различных исследований. В гл. 9 МШ сравнивается с факторным и кластерным анализом. В конце книги приведен список встречающихся в ней символов.

Миннеаполис, Миннесота.
Октябрь 1982 г.

МАРК Л. ДЭВИСОН

Многомерное шкалирование (МШ)— это метод, развитый в науках о поведении и социологии с целью изучения объектов и индивидов. Оно применялось для исследования социальной структуры организации, семантической структуры слов, логической структуры служебных обязанностей. МШ оказалось полезным во многих областях, в том числе в антропологии, педагогике, географии, истории, психологии, социологии, науках о поведении, исследованиях маркетинга. Как факторный и кластерный анализ МШ используется для описания структуры. Исходные предположения многомерного шкалирования отличаются от исходных предположений факторного и кластерного анализа, поэтому многомерное шкалирование обычно позволяет получить описания, которые отличаются от описаний, полученных с помощью методов факторного и кластерного анализа. Кроме того, МШ применимо к данным, для которых непригодно большинство обычных методов факторизации. Более подробно сравнение многомерного шкалирования с факторным и кластерным анализом приведено в гл. 9.

Основной тип данных в МШ — меры близости между двумя объектами. Мера близости — это величина, определенная на паре объектов и измеряющая, насколько эти два объекта похожи. Часто встречаются такие меры близости, как коэффициенты корреляции и совместные вероятности. Обозначим меру близости пары стимулов (i, j) символом δ_{ij} . Если мера близости такова, что самые большие значения δ_{ij} соответствуют парам наиболее похожих объектов, то δ_{ij} — мера сходства. Если же мера близости такова, что самые большие значения δ_{ij} соответствуют парам наименее похожих объектов, то δ_{ij} — мера различия. Если не указано противное, то читателю этой книги следует считать δ_{ij} мерой различия. В гл. 3 описываются некоторые методы сбора данных о близости, применяемые в социологии и науках о поведении.

В [Carroll and Arabie, 1980, p. 608] приведены два определения МШ. Согласно наиболее полному из них под МШ понимается «семейство геометрических моделей для многомерного представления данных и соответствующий набор методов для подгонки таких моделей к реальным данным»¹. Под столь широкое определение подходит большинст-

¹ Цитировано по разрешению из Annual Review of Psychology.V.31, 1980. Copyright 1980 by Annual Reviews Inc.

во методов многомерной статистики, в том числе факторный и кластерный анализ. В настоящей книге МШ трактуется значительно уже — как набор многомерных статистических методов, предназначенных для определения соответствия данных о близости различным дистанционным пространственным моделям и для оценки параметров этих моделей.

ДИСТАНЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАЗЛИЧИЯ

В приведенном выше определении выражение «дистанционная пространственная модель» является намеком на рассматриваемую в [Richardson, 1938] аналогию между понятием схождения в психологии и понятием расстояния в геометрии. Строго говоря, аналогия включает не понятие схождения в психологии, а понятие различия. Параллели между различием и расстоянием просматриваются в аксиомах расстояния. Для того чтобы функция, определенная на парах объектов (a, b) , была евклидовым расстоянием, она должна удовлетворять следующим четырем аксиомам:

$$d(a, b) \geq 0, \quad (1.1)$$

$$d(a, a) = 0, \quad (1.2)$$

$$d(a, b) = d(b, a), \quad (1.3)$$

$$d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c). \quad (1.4)$$

В применении к понятию различия первая аксиома означает, что или два объекта идентичны друг другу и их различие равно 0, или они в чем-то отличны друг от друга и их различие больше 0. Вторая аксиома означает, что объект идентичен сам себе. В соответствии с третьей аксиомой объект a так же отличается от объекта b , как объект b отличается от объекта a .

Хотя выполнение первых трех аксиом интуитивно кажется вполне возможным, никакие качества различия не дают возможности предположить, будет или не будет выполняться четвертая аксиома, называемая аксиомой треугольника (неравенством треугольника). Однако в социологии и науках о поведении выполнение трех аксиом из четырех уже неплохо, так что аналогия между различием в психологии и расстоянием в геометрии есть.

Более формально дистанционную модель для различий можно описать следующим образом. Пусть δ_{ij} — мера различия между объектами i и j . Объектами могут быть автомобили, места работы, кандидаты на должности. Согласно модели меры различия функционально связаны с K признаками объектов. Если объекты — автомобили, то признаками могут быть, например, цена, расход бензина на милю, спортивность автомобиля. Если объекты — места работы, то признаками могут служить престижность, заработная плата, условия труда. Пусть

x_{ik} и x_{jk} — значения признака k у объектов i и j соответственно. Например, если объекты — автомобили, а признак — расход бензина, то x_{ik} и x_{jk} будут означать расход бензина этих автомобилей. Или если объекты — места работы, а признак k — престижность, то x_{ik} и x_{jk} — престижность работы i и j соответственно.

Согласно обычной формуле евклидова расстояния меры различия связаны со значениями признаков следующей функцией:

$$\delta_{ij} = d_{ij} = \left[\sum_{k=1}^K (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}. \quad (1.5)$$

В книге δ_{ij} обозначает данные, величину, полученную для пары объектов (i, j) эмпирически, путем наблюдения. С другой стороны, d_{ij} , x_{ik} и x_{jk} — теоретические величины в статистической модели для данных о различии. Эти теоретические величины непосредственно не наблюдаемы и могут быть оценены по данным.

М. Ричардсон [Richardson, 1938] предложил начать с субъективных суждений о различиях объектов в парах и получить признаки, на которых эти суждения основаны, а также значения стимулов по этим признакам. Он ввел задачу статистической оценки, откуда и появилось многомерное шкалирование, — задачу оценки координат стимулов x_{ik} и x_{jk} по мерам различий.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДИСТАНЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Дистанционная модель различий не была принята на веру психологами-экспериментаторами. Для ее проверки психологи избрали различные экспериментальные тесты [Beals et al., 1968; Carroll and Wish, 1974a; Krantz and Tversky, 1975; Krumhansl, 1979; Monahan and Lockhead, 1977; Nygren, 1978, 1979; Wiener — Ehrlich, 1978]. Один тип таких тестов основан на аксиомах (1.1) — (1.4). Так как евклидовы расстояния должны удовлетворять аксиомам, данные о различии, удовлетворяющие модели евклидова расстояния (1.5), тоже должны удовлетворять аксиомам.

Для иллюстрации проверок аксиом рассмотрим эксперимент, описанный в [Rothkopf, 1957]. В своем эксперименте Э. Роткопф предъявлял испытуемому один за другим два сигнала из азбуки Морзе. Затем он просил испытуемого ответить, являются ли эти сигналы одним и тем же сигналом или двумя разными. Все возможные пары сигналов предъявлялись примерно одинаковое число раз. Приблизительно в половине предъявлений стимулов i и j в одной паре первым предъявлялся стимул i , а во второй половине предъявлений — стимул j . Число предъявлений пары стимулов (i, j) , в которых испытуемый дал ответ «различны», может рассматриваться как мера слухового различия между стимулами i и j .

Из аксиомы (1.1) следует, что частота ответа «различны» при предъявлении двух одинаковых сигналов не должна зависеть от того, какой

сигналы предъявлен. Ответ «различны» был дан при предъявлении двух сигналов азбуки Морзе Е в 3% случаев, а при предъявлении двух сигналов Р — в 17%. Психологи проинтерпретировали такие результаты как нарушение аксиомы расстояния (1.1) [Tversky, 1977].

Взяты вместе, аксиомы (1.1) и (1.2) ведут к предположению, что ни в одном случае при предъявлении пары различных сигналов ответ «различны» не должен появляться реже, чем при предъявлении пары идентичных сигналов. В данных Роткопфа есть одно небольшое нарушение этого принципа. При предъявлении двух сигналов Р ответ «различны» был дан в 17% случаев. Когда же сигнал Х следовал за сигналом В, ответ «различны» был дан только в 16% случаев. Психологи проинтерпретировали эти результаты как свидетельство того, что данные о различии не удовлетворяют первым двум аксиомам расстояния [Tversky, 1977].

Третья аксиома ведет к предположению, что ответ «одинаковы» должен встречаться с одной и той же частотой как в случае, когда стимул j следует за стимулом i , так и тогда, когда стимул i следует за стимулом j . Иначе говоря, эта аксиома ведет к предположению, что порядок предъявления стимулов не влияет на ответ. Данные Роткопфа этому предположению не удовлетворяют. Например, когда сигнал U следовал за А, ответ «различны» встречался в 63% случаев. А когда сигнал А следовал за U, ответ «различны» встретился в 86% случаев. Психологи проинтерпретировали такие результаты как свидетельство того, что данные о различии не удовлетворяют третьей аксиоме расстояния [Tversky, 1977; Zinnes and Wolff, 1977].

Данные Э. Роткопфа в общем удовлетворяют последней аксиоме. Для большинства наборов трех стимулов (h, i, j) $\delta_{hi} + \delta_{ij} \geq \delta_{hj}$. Например, при предъявлении пар сигналов (X, Y), (Y, Z) и (X, Z) ответ «различны» был дан в 52, 77 и 74% случаев. Ясно, что $\delta_{XY} = 0,52 + \delta_{YZ} = 0,77$ больше, чем $\delta_{XZ} = 0,74$. Поэтому неравенство треугольника для трех стимулов выполнено.

Если неравенство треугольника не выполнено, но выполнены три остальные аксиомы, то данные можно преобразовать таким образом, что неравенство треугольника будет выполняться. Пусть

$$c = \max(\delta_{hj} - \delta_{hi} - \delta_{ij}) \text{ по всем } (h, i, j). \quad (1.6)$$

После этого можно создать новые меры различий γ_{ij} :

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= 0, \text{ если } i = j, \\ \gamma_{ij} &= \delta_{ij} + c, \text{ если } i \neq j. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если δ_{ij} удовлетворяет первым трем аксиомам, то γ_{ij} будет удовлетворять всем четырем аксиомам расстояния.

Несмотря на аналогию различия в психологии и расстояния в геометрии, экспериментальные проверки не подтвердили дистанционную

модель. Неудачи не заставили статистиков отказаться от развития многомерного шкалирования, основанного на дистанционной модели. Причин для этого несколько. Первая заключается в том, что некоторые статистики могут не знать об экспериментальных работах. Вторая причина следующая: если даже модель полностью не выполняется, обработка данных с применением многомерного шкалирования достаточно груба, что оправдывает ее применение. Третья причина: МШ широко использовалось для различных данных, не только для изучавшихся психологами суждений о различиях. Поэтому критика дистанционной модели, обусловленная экспериментальными работами, не применима ко всем приложениям МШ. Более подробное обсуждение экспериментальных проверок дистанционной модели для данных о различиях читатель найдет в [Carroll and Wish, 1974].

Выводы, полученные из экспериментальных исследований оценок различия, не могут быть расширены на другие типы мер близости. Тем не менее проверки аксиом, проведенные психологами, могут быть применены к любому возможному индексу близости. Например, коэффициент корреляции r_{ij} — одна из возможных мер близости, а $(2 - 2r_{ij})^{1/2} = \delta_{ij}$ — возможная мера различия. Из свойств коэффициента корреляции следует, что δ_{ij} будет удовлетворять первым трем аксиомам, а именно $\delta_{ij} = 0$, если $i = j$, так как $r_{ij} = 1$ при $i = j$; $\delta_{ij} \geq 0$ для всех (i, j) , так как r_{ij} меняется от -1 до 1 ; $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, так как $r_{ij} = r_{ji}$. Сразу неясно, будет ли δ_{ij} удовлетворять аксиоме треугольника. Однако, поскольку $\delta_{ij} = (2 - 2r_{ij})^{1/2}$ не нарушает очевидным образом ни одну из четырех аксиом расстояния, она остается мерой близости, пригодной для применения в многомерном шкалировании. Аналогично аксиомы (1.1) — (1.4) дают основы оценки пригодности любой меры близости для использования ее в МШ.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ШКАЛИРОВАНИЯ

Автору известны применения МШ в акустике [Soli and Arabie, 1979], антропологии [Swapp, 1978], педагогике [Johnson et al., 1970; Subkoviak, 1975; Wainer and Berg, 1972], географии [Hanham, 1976], истории [Kendall, 1971], исследованиях маркетинга [Cooper, 1973; Green and Carmone, 1972], психологии [Davison and Jones, 1976; Rummel — hart and Abrahamson, 1973], политических науках [Mauzer, 1972], социологии [Coxon and Jones, 1974]. Так как МШ применяется в различных областях по-разному, у читателя может возникнуть желание познакомиться с приведенными работами для поиска путей приложения МШ в своей области*. Статья Р. Шепарда [Shepard, 1980]

* О приложениях многомерного шкалирования см., в частности, работы [Бабаева и Каменский, 1977; Каменский, 1977, 1979; Каменский и др., 1977, 1979, 1980; Манелля и Терехина, 1974; Петров и др., 1978, 1980; Сатаров, 1984; Сатаров и Станкевич, 1982, 1983; Терехина, 1977а, 1978а, 1985, 1986]. — Примеч. пер.

содержит обсуждение МШ и его применения в акустике, психофизике и педагогике.

Приложения МШ могут быть разделены на три группы в соответствии с разными целями. Первую группу назовем группой координатных приложений. До того, как понять, почему организм человека или животного определенным образом реагирует на стимулы, исследователь должен выяснить, какие именно характеристики стимулов существенны для организма. В координатных приложениях исследователь применяет МШ, чтобы понять, на какие характеристики стимулов реагирует организм. Обнаруженные с помощью МШ координатные оси считаются существенными для организма характеристиками, а координаты стимулов по этим осям интерпретируются как значения по этим характеристикам.

Такой подход изложен в работе [Davison and Jones, 1976], где МШ применяется для определения характеристик межличностного восприятия в армии. Полученные характеристики позволяли построить модели социометрического выбора. В [Rummelhart and Abrahamson, 1973] с помощью МШ определялись характеристики названий животных. Эти характеристики были использованы для построения модели решения задач типа: собака; щенок; кошка, (котенок). В [Vogman et al., 1976] определялись характеристики выполнения работы, которые в дальнейшем служили для оценки ее выполнения.

МШ не является единственным методом определения характеристик стимулов и не всегда представляет собой лучший способ. В работе [Vogman et al., 1976] сравнивались два способа определения характеристик выполнения работ: МШ и метод критических случаев (critical incidents technique). Авторы пришли к выводам, что решение, полученное с помощью МШ, не лучшее. В конечном счете практическая ценность полученных МШ характеристик определяется их полезностью для объяснения, например, социометрических данных [Davison and Jones, 1976] или решения по аналогии [Rummelhart and Abrahamson, 1973].

В приложениях типа «сжатие данных» пользователь хочет сжать сложную матрицу близости, представить описываемые этой матрицей взаимоотношения между стимулами в более простом, понятном, легко обозримом виде. Если данные о сходстве представлены в пространстве, размерность которого не выше трех, то взаимоотношения между стимулами могут быть наглядно изображены на одно-, двух- или трехмерных чертежах точками x_{ik} , полученными многомерным шкалированием. Скорее всего, Р. Шепард [Shepard, 1972a, p. 10] имел в виду сжатие данных, когда писал: «... Представление стимулов должно быть удобным для рассматривания, поэтому следует ограничиваться двумерным, в крайнем случае трехмерным, пространством».

Часто в приложениях типа «сжатие данных» не дается никакой интерпретации координатным осям. В [Shepard et al., 1975], где описана задача шкалирования чисел, почти нет попыток дать двум получен-

ным осям психологическую интерпретацию. Обсуждение сосредоточено на кластерах стимулов, найденных на графическом изображении решения задачи многомерного шкалирования. Шкалирование в этом случае служит только средством сжатия данных, приведения их в такую форму, где наглядно выделяются кластеры стимулов.

Последний тип приложений может быть назван «верификация конфигурации». В таких приложениях пользователь начинает с гипотезы о размерности пространства, которое должно быть получено, если применить к мерам близости неметрическое многомерное шкалирование, и с предположения о виде найденной при этом конфигурации точек-стимулов. Работа [Round et al., 1979] начинается с теории карьер Холланда [Holland, 1973]. Эта теория предполагает, что при применении неметрического МШ к корреляциям между шкалами в каталоге занятий Стронга — Кэмпбелла [Campbell, 1977] или в каталоге предпочтения профессий Холланда [Holland, 1965] шкалы должны лечь в двумерном пространстве вдоль шестиугольника. Порядок точек на шестиугольнике должен соответствовать гипотезе Холланда [Holland, 1973]. В [Hubert, 1974] обсуждаются вопросы применения МШ для верификации конфигураций в задачах исследования установок и развития, хотя там и не описаны конкретные приложения.

Для более глубокого понимания широты приложений МШ мы рекомендуем читателю изучить примеры каждого из типов приложений в перечисленных выше работах. В последующих главах будут приведены все такие типы.

ДИСТАНЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Кумбс [Coombs, 1964] предложил для данных о предпочтении дистанционную модель, часто называемую моделью развертывания. В этой модели субъект (или испытуемый, эксперт) s характеризуется набором координат x_{sk} , которые являются координатами его идеальной точки. Согласно модели, чем больше стимул напоминает идеал, тем более он предпочтителен. Координата x_{sk} — это значение по k -й оси, которое субъект считает идеальным. Взятые вместе K координат идеала субъекта s определяют комбинацию значений признаков стимулов, которую субъект будет считать идеалом.

Пусть δ_{is} — степень предпочтения стимула i субъектом s . Предположим, что чем больше величина δ , тем меньше предпочтение. Иначе говоря, δ является мерой того, насколько стимул i не нравится, а не того, насколько он нравится. В одной из версий модели развертывания предполагается, что (с точностью до ошибки) предпочтение можно представить в виде

$$\delta_{is} = d_{is} = \left[\sum_{k=1}^K (x_{ik} - x_{sk})^2 \right]^{1/2} \quad (1.8)$$

В этой модели предполагается, что суждение субъекта о предпочтении формируется путем сравнения стимула с его идеальной точкой в K -мерном пространстве характеристик объектов. Те стимулы, которые в пространстве этих координат лежат дальше всего от идеала, нравятся меньше всего.

Из-за очевидной параллели между дистанционной моделью для различий и дистанционной моделью для предпочтений некоторые алгоритмы могут быть использованы для нахождения координат стимулов в обоих случаях; в дистанционной модели для предпочтений алгоритмы можно применять для нахождения координат идеальной точки. В гл. 7 будут рассмотрены алгоритмы МШ для данных о предпочтении.

До перехода к обсуждению в гл. 4—7 различных алгоритмов МШ мы введем математические понятия, существенные для всех этих алгоритмов. В гл. 2 приведены основные понятия матричной алгебры и их геометрическая интерпретация. В гл. 3 рассматриваются наиболее часто встречающиеся виды данных о близости и методы их сбора.

ЗАДАЧИ

1. На рис. 1.1 изображены расстояние в милях на один галлон бензина и стоимость трех автомобилей. Координаты каждого автомобиля приведены в скобках. Первое число в скобке — координата по горизонтальной оси. Второе число — координата по вертикальной оси. При ответах на вопросы а) — г) предположите, что субъект будет считать различие между двумя стимулами равным расстоянию на рисунке.

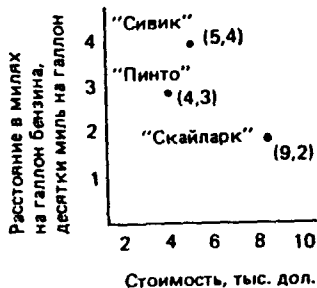


Рис. 1.1. Расстояние в милях на один галлон бензина и стоимость трех автомобилей

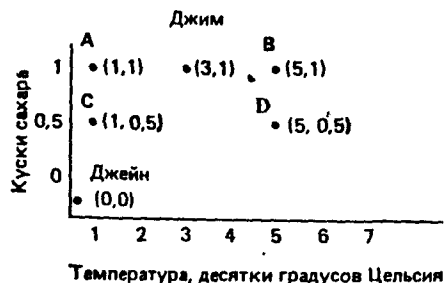


Рис. 1.2. Чашки чая и идеальные точки субъектов

- Как будет оценено различие между «Пинто» и «Скайларк»?
- Как будет оценено различие между «Сивик» и «Пинто»?
- Как будет оценено различие между «Пинто» и «Сивик», если субъект игнорирует координатную ось «расстояние в милях на галлон бензина»?
- Если субъект игнорирует координатную «стоимость», то что будет в его оценке более похоже на «Сивик», «Пинто» или «Скайларк»? Почему?

2. На рис. 1.2 приведены температура и число кусков сахара в четырех чашках чая *A*, *B*, *C*, *D*. Показано также расположение идеальных точек для двух субъектов. При ответах на вопросы а) — г) предположите, что предпочтение стимула субъектом будет соответствовать расстоянию на рисунке между стимулом и его идеальной точкой.

а) Насколько должна Джейн не любить стимул *B*?

б) Что Джим предпочитает больше — стимул *A* или стимул *C*? Обоснуйте ваш ответ.

в) Насколько должен Джим не любить стимул *D*, если он будет игнорировать координату «температура»?

г) Если Джейн игнорирует координату «сахар», то что она предпочитает больше — стимул *B* или стимул *D*? Почему?

ОТВЕТЫ

1. а) $\delta = 5,10$.

б) $\delta = 1,41$.

в) $\delta = 1,00$.

г) «Пинто». По координатной оси «расстояние в милях на галлон бензина» «Пинто» от «Сивик» — на расстоянии 1, а «Скайларк» — на расстоянии 2.

2. а) $\delta = 5,10$.

б) Стимул *A*. Расстояние *A* от его идеала — только 2 единицы. Расстояние *C* от его идеала — 2,06 единицы.

в) $\delta = 0,50$.

г) Для Джейн не будет различия между *B* и *D*, так как по оси «температура» расстояния от ее идеальной точки до обоих стимулов одинаковы (5 единиц).

Глава 2 ● ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

В большинстве работ, посвященных многомерному шкалированию, для описания методов и лежащего в их основе аппарата используется матричная алгебра. Не имея представления об основных понятиях матричной алгебры, исследователь не может читать соответствующую литературу для пополнения своих знаний. Поэтому в настоящей главе вводятся понятия матричной алгебры и дается их геометрическая интерпретация. Геометрическая интерпретация позволяет представить абстрактные матричные понятия в конкретной графической форме. В этой главе мы почти не будем объяснять, почему в МШ важны подобные понятия. Это станет ясно в гл. 4—9. Сейчас же достаточно сказать, что причина использования матричной алгебры в многомерном шкалировании та же, что и в других областях. Многое можно описать с помощью матриц значительно короче, чем без них.

МАТРИЦЫ, ВЕКТОРЫ И СКАЛЯРЫ

Матрицей называется двумерная таблица чисел, расположенных по строкам и столбцам. На рис. 2.1 изображены две матрицы. При обсуждении матрицы число строк и столбцов обозначено следующим образом: $(R \times C)$. Здесь R — первый элемент, обозначающий число строк в матрице, а C — второй элемент, обозначающий число столбцов. Матрица может иметь произвольное число строк и столбцов.

В этой книге матрицы будут обозначаться прописными буквами, набранными жирным шрифтом. Например, матрицы на рис. 2.1 обозначены прописными буквами A и B . Часто встречающееся обозначение типа $A_{(3 \times 3)}$ указывает на матрицу с тремя строками и тремя столбцами.

Элементы матриц обозначаются строчными буквами, набранными курсивом. Например, символ a_{13} обозначает элемент матрицы A , находящийся на пересечении строки 1 и столбца 3. Для матрицы A на рис. 2.1 $a_{13} = 7$. Элемент в строке 2 и столбце 4 матрицы B обозначается b_{24} . На рис. 2.1 $b_{24} = -2$. В общем случае a_{rc} обозначает элемент в строке r и столбце c матрицы A .

Особый интерес представляют некоторые специальные типы матриц. Первый из них — это матрицы, называемые *квадратными*, в которых число строк равно числу столбцов, т. е. $R = C$. Матрица

А на рис. 2.1 квадратная, так как у нее три строки и три столбца. Матрица В — не квадратная, так как число ее строк (3) не равно числу столбцов (4). Квадратная матрица А называется *симметрической*, если для всех пар (r, c) $a_{rc} = a_{cr}$. Матрица А на рис. 2.1 не симметрическая, так как $a_{12} = 4$ не равно $a_{21} = 2$ и $a_{32} = 6$ не равно $a_{23} = 8$. С другой стороны, матрица А на рис. 2.2 симметрическая. Для любой пары значений (r, c) $a_{rc} = a_{cr}$. Например, $a_{12} = a_{21} = 2$ и $a_{24} = a_{42} = 4$. Симметрической может быть только квадратная матрица. Поэтому матрица В на рис. 2.1 никак не может считаться симметрической.

Диагональные элементы квадратной матрицы — это те элементы, для которых номер строки совпадает с номером столбца (т. е. a_{11} , a_{22} , a_{33} и т. д.). Набор этих элементов называется *диагональю* матрицы. На рис. 2.1 диагональные элементы матрицы А изображены жирным шрифтом. Элементы квадратной матрицы, не лежащие на диагонали,

называются *внедиагональными элементами*. Внедиагональные элементы могут быть разделены на две части — элементы нижнего треугольника и элементы верхнего треугольника. Элементы, лежащие сверху и справа от диагонали, называются элементами *верхнего тре-*

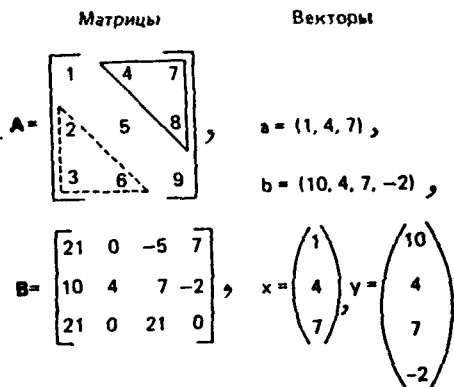


Рис. 2.1. Матрицы и векторы



Рис. 2.2. Типы квадратных матриц

угольника. Для этих элементов номер столбца превышает номер строки. Элементы, лежащие слева и снизу от диагонали, называются элементами *нижнего треугольника*. Для этих элементов номер строки превышает номер столбца. На рис. 2.1 в матрице А элементы верхнего треугольника обведены сплошным треугольником. Элементы нижнего треугольника обведены пунктирным треугольником. Квадратная мат-

рица называется *диагональной матрицей*, если все ее внедиагональные элементы равны 0. На рис. 2.2 матрицы В и С диагональные. Специальным и особенно важным случаем диагональной матрицы является единичная матрица. Любая квадратная диагональная матрица называется *единичной матрицей*, если все ее диагональные элементы равны 1,0. На рис. 2.2 матрица С — единичная матрица. Единичная матрица обозначается буквой I.

Матрица — это двумерный массив чисел, а *вектор* — одномерный массив. *Вектор-строка* — это горизонтальный массив ($1 \times C$), состоящий из C чисел, расположенных в виде одной строки. Можно рассматривать вектор-строку как матрицу, имеющую только одну строку. Аналогично можно считать, что *вектор-столбец* — это матрица, состоящая только из одного столбца. Иначе говоря, вектор-столбец — это вертикальный массив ($R \times 1$) чисел, расположенных в виде одного столбца. В этой книге векторы будут обозначаться строчными буквами, набранными жирным шрифтом. На рис. 2.1 a и b — примеры векторов-строк, а x и y — примеры векторов-столбцов. Если не оговорено противное, то все векторы — векторы-столбцы.

Любую матрицу R на C можно считать состоящей из R векторов-строк или C векторов-столбцов. Можно рассматривать матрицу В на рис. 2.1 как состоящую из четырех векторов-столбцов. Или В можно считать состоящей из трех векторов-строк.

Как матрицы могут быть разделены на векторы, так и векторы могут быть сведены к скалярам. *Скаляр* — это одно число. Каждый элемент матрицы или вектора является скаляром. Матрицы могут быть представлены графически. В следующем параграфе будет объяснено, как это делается.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦ

Очень важная в многомерном шкалировании матрица — матрица координат стимулов. В данной книге координатная матрица — это матрица X из I строк и K столбцов. Каждая строка соответствует одному из исследуемых стимулов. Каждый столбец соответствует одной координате. Элементы X , x_{ik} и x_{jk} — это координаты стимулов в формуле (1.5). Иначе говоря, элемент x_{jk} в j -й строке и k -м столбце координатной матрицы X — это k -я координата стимула j .

В МШ координатная матрица обычно стандартизируется таким образом, чтобы среднее значение координат по каждой из осей было равно 0. Это означает, что сумма элементов каждого из столбцов координатной матрицы будет равна 0. Если не оговорено противное, то координатная матрица будет предполагаться стандартизованной. Матрица координат стимулов имеет геометрическую интерпретацию, которая является основным предметом рассмотрения в этом параграфе. Геометрическая интерпретация дает возможность отобразить абстрактную координатную матрицу графически.

На рис. 2.3 изображена координатная матрица X и дано ее графическое представление. Каждая координатная ось чертежа соответствует одному столбцу матрицы X . Первый столбец, соответствующий координате I, содержит значения нескольких стимулов по первой координатной оси. Аналогично второй столбец X содержит координаты каждого стимула по второй координатной оси.

Каждая строка X соответствует на чертеже одной из четырех точек. Например, вторая строка соответствует стимулу b , координаты которого $(2, -1)$. Эти координаты являются элементами строки 2 матрицы X . В общем элемент x_{rc} в X — это координата стимула r по оси c на чертеже.

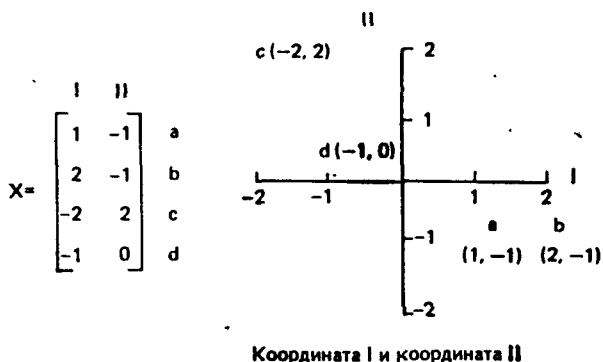


Рис. 2.3. Матрица X и ее геометрическое представление

В следующих главах координатные матрицы и их графическое представление будут использоваться для описания решений задач многомерного шкалирования. В матричной форме строки будут соответствовать стимулам, а столбцы — признакам стимулов. В графической форме стимулы представляются точками, а признаки — осями.

Для сложных стимулов нет гарантии, что их можно представить двумя осями. Например, места работы могут характеризоваться четырьмя признаками: престижность, заработная плата, условия труда, необходимый уровень образования. Города могут восприниматься по таким параметрам, как население, средняя дневная температура, скорость роста налога на собственность, скорость роста безработицы. Представление в матричной форме решения, имеющего более двух координатных осей, не создает никаких проблем. Для описания координат стимулов матрица будет содержать три, четыре столбца или столько столбцов, сколько необходимо.

Графическое представление решений более чем с двумя осями создает трудности. Напечатанная страница двумерна. Поэтому она плохо подходит для представления на одном чертеже решений, имеющих четыре и более координатные оси. Хотя трехмерное решение и может быть

представлено на двумерной странице, для большинства из нас сложно зрительно представить себе подобную конфигурацию.

Обычно решение более чем с двумя осями представляется серией двумерных чертежей, по одному чертежу на каждую пару осей. На рис. 2.4 приведена серия двумерных чертежей, необходимых для изображения стимульной конфигурации матрицы X.

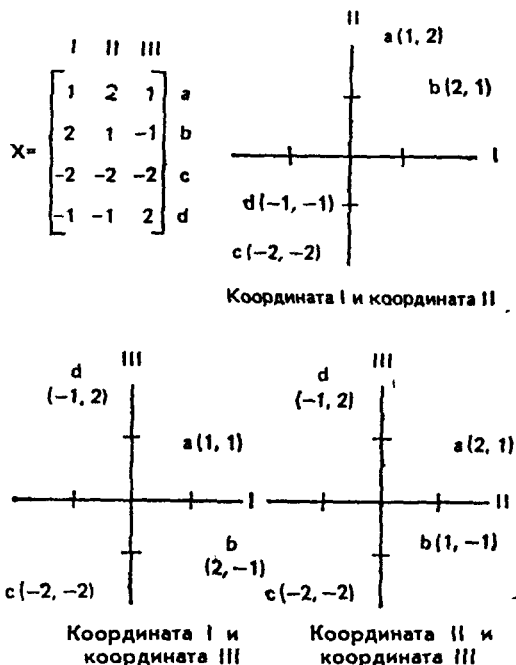


Рис. 2.4. Чертежи, основанные на матрице X

Арифметические операции — сложение, вычитание, умножение и деление — являются скалярными операциями, т. е. они определены на числах. В следующем параграфе будут рассмотрены матричные операции (сложение матриц, вычитание матриц и т.п.), соответствующие основным скалярным операциям. Большинство матричных операций является расширениями скалярной арифметики, хотя, конечно, это сложные расширения.

МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Существует одна операция — транспонирование матрицы, — которая не имеет аналога среди стандартных арифметических операций. В этом параграфе мы начнем с операции транспонирования и затем перейдем к обсуждению сложения, вычитания, умножения и матричного аналога деления.

Транспонирование матриц

Матрица $B_{(C \times R)}$ называется транспонированной матрицей матрицы $A_{(R \times C)}$, если векторы-столбцы матрицы A являются векторами-строками матрицы B , и наоборот. Например, матрица B на рис. 2.5 является транспонированной матрицей A . Четыре элемента первой строки матрицы A в точности те же, что и четыре элемента первого столбца матрицы B . Аналогично элементы второй строки A в точности те же, что и элементы второго столбца матрицы B , и т. д. Короче говоря, получить матрицу B , являющуюся транспонированной матрицей A

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 0 & -5 & 7 \\ 10 & 4 & 7 & -2 \\ 21 & 0 & 21 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = A' = \begin{bmatrix} 21 & 10 & 21 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 21 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 2.5. Матрица A и транспонированная матрица $B = A'$

можно, взяв строки A и сделав их столбцами B . Если B — транспонированная матрица A , то число строк в A равно числу столбцов в B , а число столбцов в A равно числу строк в B .

Формально $B_{(C \times R)}$ называется *транспонированной матрицей* матрицы $A_{(R \times C)}$, если каждый элемент b_{cr} в B равен элементу a_{rc} в A . Иными словами, элемент в строке c и столбце r матрицы B должен быть элементом в строке r и столбце c матрицы A . Например, элемент в строке 2, столбце 1 в A на рис. 2.3, $a_{21} = 10$, равен элементу в строке 1, столбце 2 в B , $b_{12} = 10$. В некоторых книгах транспонированная матрица A обозначается A^T . Мы же транспонированную матрицу A будем обозначать A' .

Сложение и вычитание матриц

Две матрицы могут быть прибавлены друг к другу, только если у них одинаковое число строк и одинаковое число столбцов. Аналогично одну матрицу можно вычесть из другой, только если у них одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

Сумма двух матриц получается сложением соответствующих элементов этих двух матриц, т. е. матрица $S_{(R \times C)}$ является суммой матриц $A_{(R \times C)}$ и $B_{(R \times C)}$, если каждый элемент S_{rc} равен $a_{rc} + b_{rc}$. Иначе говоря, элемент в строке r , столбце c матрицы S получается сложением элемента в строке r , столбце c матрицы A и элемента в стро-

ке r , столбце c матрицы B . Например, элемент в строке 3, столбце 2 $S_{32} = 10$, получен путем сложения элементов в строке 3, столбце 2 в матрице A , $a_{32} = 7$, и в матрице B , $b_{32} = 3$; $s_{32} = a_{32} + b_{32} = 7 + 3 = 10$. На рис. 2.6 изображено сложение матриц $S = A + B$.

Вычитание матриц полностью аналогично сложению, т. е. разность между матрицами получается путем вычитания соответствующих элементов. Формально матрица $D_{(R \times C)}$ является разностью матрицы

$$\begin{array}{l}
 S = A + B \\
 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 11 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\
 s_{11} = a_{11} + b_{11} = 1 + 4 = 5 \quad s_{12} = a_{12} + b_{12} = 3 + 1 = 4 \\
 s_{21} = a_{21} + b_{21} = 2 + 2 = 4 \quad s_{22} = a_{22} + b_{22} = 4 + 7 = 11 \\
 s_{31} = a_{31} + b_{31} = 5 + 5 = 10 \quad s_{32} = a_{32} + b_{32} = 7 + 3 = 10 \\
 \\
 D = A - B \\
 \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\
 d_{11} = a_{11} - b_{11} = 1 - 4 = -3 \quad d_{12} = a_{12} - b_{12} = 3 - 1 = 2 \\
 d_{21} = a_{21} - b_{21} = 2 - 2 = 0 \quad d_{22} = a_{22} - b_{22} = 4 - 7 = -3 \\
 d_{31} = a_{31} - b_{31} = 5 - 5 = 0 \quad d_{32} = a_{32} - b_{32} = 7 - 3 = 4
 \end{array}$$

Рис. 2.6. Сложение и вычитание матриц

$A_{(R \times C)}$ и матрицы $B_{R \times C}$, если каждый элемент в D , d_{rc} , получен путем вычитания элемента в строке r , столбце c в B из соответствующего элемента в A , a_{rc} , т. е. $d_{rc} = a_{rc} - b_{rc}$. Например, элемент в строке 3, столбце 2 в D , $d_{32} = 4$, получается путем вычитания элемента в строке 3, столбце 2 в B , $b_{32} = 3$, из соответствующего элемента в A , $a_{32} = 7$: $d_{32} = a_{32} - b_{32} = 7 - 3 = 4$.

Скалярное умножение

Скалярное умножение — это умножение матрицы на скаляр: если мы хотим скалярно умножить матрицу A на скалярную константу c , то для получения произведения cA просто берется каждый элемент A и умножается на c . На рис. 2.7 приведен пример скалярного умножения.

$$\begin{matrix} & P & = & C & & A \\ \left[\begin{array}{ccc} 6 & 24 & 18 \\ 12 & 6 & 0 \end{array} \right] & = & (6) & & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{matrix}$$

$$p_{11} = c(a_{11}) = (6)(1) = 6$$

$$p_{21} = c(a_{21}) = (6)(2) = 12$$

$$p_{12} = c(a_{12}) = (6)(4) = 24$$

$$p_{22} = c(a_{22}) = (6)(1) = 6$$

$$p_{13} = c(a_{13}) = (6)(3) = 18$$

$$p_{23} = c(a_{23}) = (6)(0) = 0$$

Матричное умножение

$$\begin{matrix} & P & = & A & & B \\ \left[\begin{array}{cc} 33 & 55 \\ 30 & 52 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{array} \right] & & \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{array} \right]
 \end{matrix}$$

$$p_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (4)(1) + (2)(2) + (5)(5) = 33$$

$$p_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = (4)(3) + (2)(4) + (5)(7) = 55$$

$$p_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = (1)(1) + (7)(2) + (3)(5) = 30$$

$$p_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = (1)(3) + (7)(4) + (3)(7) = 52$$

Рис. 2.7. Скалярное и матричное умножение

Матричное умножение

Фактически существуют две формы матричного умножения: умножение слева и умножение справа. В матричном равенстве $P_{(R \times C)} = A_{(R \times K)} B_{(K \times C)}$, или, проще, $P = AB$, для получения матричного произведения P матрица A умножается справа на матрицу B , а матрица B умножается слева на матрицу A . Матричное произведение P всегда будет иметь столько строк, сколько строк в матрице A , и столько столбцов, сколько столбцов в матрице B . Число столбцов в A должно быть равно числу строк в B . Это означает, что матрицу A можно умножить справа только на такие матрицы, число строк которых равно числу столбцов в A . Аналогично матрица B может быть умножена слева только на такие матрицы, число столбцов которых равно числу строк в B .

Если матрица P — произведение, получающееся путем умножения матрицы $A_{(R \times K)}$ на матрицу $B_{(K \times C)}$, то элементы матрицы P образуются следующим образом:

$$p_{rc} = \sum_{k=1}^K a_{rk} b_{kc}. \quad (2.1)$$

На рис. 2.7 приведены два примера матричного умножения. Чтобы показать, как образуются элементы произведения P , отметим, что

$$P = A \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 14 & 4 \\ 2 & 13 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} = (4) (0) + (1) (1) = 1$$

$$p_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} = (4) (3) + (1) (2) = 14$$

$$p_{13} = a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} = (4) (1) + (1) (0) = 4$$

$$p_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} = (3) (0) + (2) (1) = 2$$

$$p_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} = (3) (3) + (2) (2) = 13$$

$$p_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} = (3) (1) + (2) (0) = 3$$

Рис. 2.7 (продолжение)

в верхней части рис. 2.7 элемент в первой строке, втором столбце матрицы P , $p_{12} = 55$, находят так:

$$p_{12} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} = (4) (3) + (2) (4) + (5) (7) = 55. \quad (2.2)$$

Вычисление остальных элементов P представлено на рис. 2.7.

Далее в книге будут использованы два правила матричного умножения. Доказательства читатель может найти в литературе по матричной алгебре*. Первое правило задается следующей теоремой.

* На русском языке можно рекомендовать: книги для специалистов-прикладников [Гильберт, 1981; Мозоров, 1983; Сирл и Госман, 1974], учебники [Беклемишев, 1974; Гельфанд, 1971; Курош, 1962; Стренг, 1980], монографии [Беллман, 1969; Воеводин и Кузнецов, 1984; Гантмахер, 1967; Ланкастер, 1978; Маркус и Минк, 1972; Райс, 1984]. — *Примеч. пер.*

Теорема 1. Если матрица $A_{(R \times C)}$ умножается справа на единичную матрицу $I_{(C \times C)}$, то произведение равно: $A : AI = A$. Аналогично, если матрица $A_{(R \times C)}$ умножается слева на единичную матрицу $I_{(R \times R)}$, то произведение равно: $A : IA = A$. Читатели, желающие подтвердить для себя эту теорему, могут умножить слева и справа матрицу A , изображенную на рис. 2.2, на $I_{(4 \times 4)}$.

Второе правило задается теоремой 2.

Теорема 2. Если $P = AB$, то $P' = B'A'$. Теорема 2 утверждает, что если P — произведение двух матриц, то P' — произведение их транспонированных матриц, взятых в обратном порядке. Читатели могут убедиться в справедливости этого правила, обратившись к примерам матричного умножения, приведенным на рис. 2.7. Вычисляя произведение $B'A'$, можно увидеть, что они в обоих случаях равны P' .

Матричный аналог деления

Деления матриц не существует, но существует матричный аналог деления. В простой арифметике один и тот же результат можно получить как путем деления 12 на 6, так и путем умножения 12 на величину, обратную 6, $1/6$, $= (6)^{-1}$, т. е. $12:6 = 12 \cdot 1/6 = 12 \cdot (6)^{-1} = 2$. Разделить на число — то же самое, что умножить на величину, обратную этому числу. В матричной алгебре нельзя разделить одну матрицу на другую, но можно умножить одну матрицу на величину, обратную другой. Можно умножить матрицу A на матрицу, обратную B , которая обозначается как B^{-1} .

A^{-1} определяется следующим образом: квадратная матрица $B_{(R \times R)}$ называется обратной квадратной матрице A в том и только том случае, если

$$A_{(R \times R)} B_{(R \times R)} = B_{(R \times R)} A_{(R \times R)} = I_{(R \times R)}. \quad (2.3)$$

Это определение ограничено квадратными матрицами, так как только квадратные матрицы могут иметь обратные. В любой работе по матричной алгебре (см., например, [Green, 1978; Hohn, 1973]) рассматриваются методы вычисления обратных матриц, а многие пакеты программ содержат программы для вычисления обратных матриц*.

В следующих главах будет использована теорема об обратных матрицах.

Теорема 3. Пусть P , A и B — квадратные матрицы с обратными P^{-1} , A^{-1} и B^{-1} соответственно. Если $P = AB$, то $P^{-1} = B^{-1} A^{-1}$. Иначе говоря, теорема 3 устанавливает, что если P — произведение двух матриц, то матрица, обратная P , — произведение двух матриц, обратных этим двум и взятых в обратном порядке.

* Материал об обратных матрицах можно найти во всех упомянутых в предыдущем примечании работах. Тексты программ вычисления обратных матриц на Фортране приведены в [Болч и Хуань, 1979; Сборник научных программ на Фортране, 1974, вып. 2]. — *Примеч. пер.*

Решение матричных уравнений

С помощью матричных операций матричные уравнения относительно неизвестных матриц можно решать почти так же, как и алгебраические уравнения. Предположим, например, что мы знаем элементы матриц A и B и хотим решить относительно неизвестной матрицы X уравнение $A = B + X$. Мы можем найти X путем вычитания B из обеих частей уравнения, чтобы получить $A - B = X$. Итак, вычитая известную матрицу B из известной матрицы A , мы можем получить матрицу X .

Аналогично предположим, что матрицы A и B известны и мы хотим решить относительно неизвестной матрицы X следующее уравнение: $A = B - X$. Можно сначала прибавить к обеим частям уравнения X и получить $A + X = B$. Затем мы можем вычесть A из обеих частей уравнения и получить $X = B - A$. Таким образом, вычитая известную матрицу A из известной матрицы B , мы можем найти неизвестную матрицу X .

Теперь предположим, что матрица B — симметрическая квадратная матрица, обратной к которой является B^{-1} . Обе матрицы A и B известны, и мы хотим решить матричное уравнение $A = BX$ относительно неизвестной матрицы X . Если мы умножим слева обе части уравнения на B^{-1} , то получим

$$\begin{aligned} B^{-1}A &= (B^{-1}B)X = \\ &= IX = \\ &= X. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Итак, умножив слева A на B^{-1} , которую можно найти, зная B , мы можем найти неизвестную матрицу X .

Если есть уравнение $A = XB$, то мы просто умножим справа обе части на B^{-1} и получим $AB^{-1} = X$. Так, умножая A на B^{-1} , можно найти неизвестную матрицу X .

Если матрица B не квадратная, то обратной матрицы она не имеет. В таких случаях для решения уравнений $A = BX$ или $A = XB$ невозможно использовать методы, описанные выше. Однако при некоторых условиях эти уравнения все-таки можно решить.

Сначала рассмотрим уравнение $A = BX$. Даже если B не квадратная, $(B' B)$ будет квадратной. Если у матрицы $(B' B)$ есть обратная, то мы можем дать такое определение левой псевдообратной матрицы матрицы B : $(B' B)^{-1} B'$. Тогда, умножив слева обе части уравнения $A = BX$ на левую псевдообратную матрицу матрицы B , получим

$$\begin{aligned} A &= BX, \\ (B' B)^{-1} B' A &= (B' B)^{-1} B' BX = \\ &= IX = \\ &= X. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Вычисляя таким способом величины в левой части уравнения (2.5), можно найти X .

Аналогично, если у матрицы BB' есть обратная, то можно решить матричное уравнение $A = XB$, умножая обе его части справа на правую псевдообратную матрицу матрицы B , т. е. матрицу $B'(BB')^{-1}$:

$$\begin{aligned} A &= XB, \\ AB'(BB')^{-1} &= XBB'(BB')^{-1} = \\ &= XI = \\ &= X. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вычислив величины в левой части (2.6), можно найти X .

Единственная обратная матрица $(B'B)^{-1}$ в (2.5) будет существовать только в том случае, если число столбцов в B не больше числа строк. Обратная матрица $(BB')^{-1}$ в (2.6) будет существовать только в том случае, если число строк в B не больше числа столбцов.

Матричный аналог извлечения квадратного корня

Над диагональными матрицами и симметрическими квадратными матрицами можно выполнить операции, аналогичные извлечению квадратного корня.

Если D — диагональная матрица, то можно определить другую диагональную матрицу, $D^{1/2}$, которая аналогична квадратному корню из D . Внедиагональные элементы матрицы $D^{1/2}$ равны 0. Каждый

$$D = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad D^{1/2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Рис 28 Диагональная матрица и ее квадратный корень

диагональный элемент — квадратный корень соответствующего диагонального элемента D . На рис. 28 показана матрица D и матрица $D^{1/2}$.

Если A — симметрическая квадратная матрица, то иногда можно найти такую матрицу B , что

$$A = BB'. \quad (2.7)$$

Строго говоря, чтобы быть квадратным корнем A , B должно удовлетворять условию $A = BB$, более узкому, чем (2.7). Если A и B — скаляры, то (2.7) будет определением квадратного корня. Будучи матрич-

ным расширением скалярного квадратного корня, \mathbf{B} в (2.7) аналогична квадратному корню из \mathbf{A} и будет иметь столько же строк и столбцов, сколько и \mathbf{A} . Число столбцов в \mathbf{B} меньше или равно числу столбцов в \mathbf{A} . Описание методов вычисления \mathbf{B} и условий, при которых матрица \mathbf{A} может быть представлена в виде произведения некоторой матрицы \mathbf{V} и ее транспонированной, интересующийся читатель найдет в [Green, 1978; Нohn, 1979]*. Для тех, кто знаком с факторным анализом, отметим, что матрицу \mathbf{B} можно вычислить, используя программу метода главных компонент, такую, как приведена в [Dixon and Brown, 1979; Nie et. al., 1975]**. Для подсчета \mathbf{B} матрица \mathbf{A} вводится в программу вместо корреляционной матрицы. На выходе получается матрица факторных нагрузок, представляющая собой желаемую матрицу \mathbf{B} .

ВРАЩЕНИЕ И МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для облегчения интерпретации решения задачи многомерного шкалирования к первоначально оцененной матрице координат стимулов \mathbf{X} применяется вращение. В гл. 4 показано, как вращение может облегчить интерпретацию. В этом параграфе просто объясняется геометрическое понятие вращения и его матричное представление.

Начнем объяснение вращения с рассмотрения матрицы координат стимулов \mathbf{X} на рис. 2.9 и ее графического представления. Вращение \mathbf{X} может быть получено последовательностью действий, изображенной на рис. 2.10.

Первый чертеж на рис. 2.10 (верхний левый угол рисунка) показывает четыре точки матрицы \mathbf{X} . Пунктирная линия (ось 1) направлена из левого нижнего угла в верхний правый. Она проходит через начало координат и отстоит на 45° в направлении против часовой стрелки от координатной оси I и на 315° от координатной оси II.

На чертеже проведены стрелки из точек a и c к оси 1. Каждая стрелка, будучи перпендикуляром, пересекает пунктирную линию под прямым углом (90°). Перпендикуляры из точек b и d не показаны, так как они лежат на пунктирной линии. Для каждой точки можно измерить расстояние по оси 1 от начала координат до пересечения перпендикуляра с этой осью (или до самой точки, если она лежит на оси 1). Это расстояние — абсолютная величина проекции точки на пунктирную линию. Проекция будет отрицательной, если пересечение лежит по направлению налево вниз от начала координат, и положительной при

* Необходимое и достаточное условие возможности представления симметрической матрицы \mathbf{A} в виде (2.7) — неотрицательность всех ее собственных значений. Эти вопросы рассмотрены в [Беклемишев, 1974; Беллман, 1969; Гельфанд, 1971; Курош, 1962; Сирл и Госман, 1974; Стренг, 1980]. — *Примеч. пер.*

** Метод главных компонент обсуждается в [Болч и Хуань, 1979; Браверман и Мучник, 1983; Дубров, 1978; Жуковская и Мучник, 1976]. В [Болч и Хуань, 1979; Сборник научных программ на Фортране, 1974, вып. 1] приведены тексты программ метода главных компонент на Фортране. — *Примеч. пер.*

Рис. 2.9. Матрица X и ее графическое представление

направлении направо вверх. На рис. 2.10 в первом столбце матрицы Y приведены проекции всех точек на ось 1.

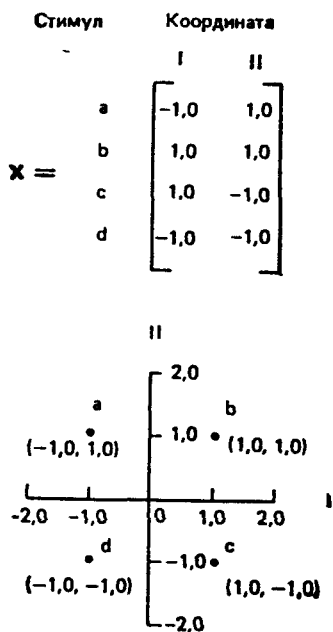
В первом столбце матрицы Y точки *a* и *c* имеют проекции 0,0, так как их перпендикуляры пересекают ось в начале координат. Точки *b* и *d* имеют проекции 1,4 и -1,4. Они лежат на пунктирной линии на расстоянии 1,4* от начала координат. Проекция *d* отрицательная, так как она лежит по направлению налево вниз. Проекция *b* лежит по направлению направо вверх, поэтому она положительна.

На чертеже в правом верхнем углу рис. 2.10 представлены те же четыре точки, что и на рис. 2.9. Там есть также перпендикуляры из точек *b* и *d* к пунктирной линии (оси 2). Перпендикуляры из точек *a* и *c* не проведены, так как они лежат на самой этой оси. В отличие от оси 1 на предыдущем чертеже ось 2 направлена из правого нижнего угла в верхний левый. Она отстоит по направлению часовой стрелки на 135° от координатной оси I и на 45° от координатной оси II. Как координатная ось I перпендикулярна координатной оси II, так и ось 1 перпендикулярна оси 2.

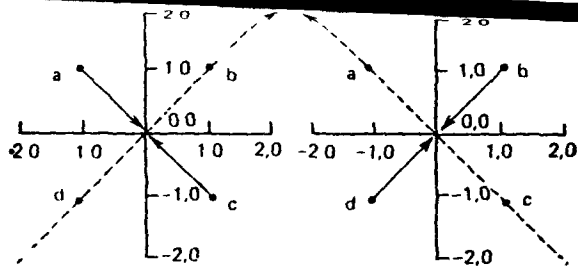
Можно сосчитать проекции каждой точки на ось 2. Абсолютная величина каждой проекции будет равна расстоянию от начала координат до пересечения с соответствующим перпендикуляром (или до самой точки, если она лежит на оси). Проекция положительна, если пересечение лежит по направлению налево вверх от начала координат, и отрицательна, если пересечение лежит по направлению направо вниз.

На чертеже в правой нижней части рис. 2.10 изображены координаты из матрицы Y. Сравнивая изображение X на рис. 2.9 с изображением Y на рис. 2.10, видим, что точки X образуют квадрат, а точки Y — ромб. Ромбовидная конфигурация Y является квадратной конфигурацией X, повернутой вокруг начала координат.

Координаты стимулов в Y являются проекциями точек X на оси в пространстве, определенном координатными осями I и II конфигура-



* Точные значения этих расстояний равны $\sqrt{2} \approx 1,4$. Числовые значения во многих других примерах также приближенные. — *Примеч. пер.*



$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,0 & 1,4 \\ 1,4 & 0,0 \\ 0,0 & -1,4 \\ -1,4 & 0,0 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

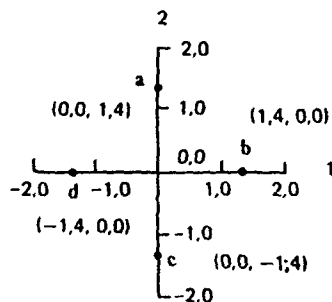


Рис. 2.10 Графическое представление поворота матрицы X, изображенной на рис. 2.9

ции X, поэтому говорят, что координаты стимулов в Y являются поворотом координат стимулов в X. В общем, если матрицы координат стимулов X и Y относятся к тем же самым точкам-стимулам, то Y является поворотом X, если координаты в Y представляют собой проекции точек на оси, лежащие в пространстве, определенном координатами из X. Y является ортогональным поворотом X, если углы между парами координатных осей в Y совпадают с углами между соответствующими парами координатных осей в X. В примерах на рис. 2.9 и 2.10 координатные оси I и II в X лежат под прямым углом друг к другу и координатные оси 1 и 2 в Y лежат тоже под прямым углом друг к другу. Иными словами, ортогональный поворот сохраняет углы между координатными осями.

Ортогональный поворот сохраняет также евклидово расстояние между парами точек, т. е. если вычислить евклидово расстояние между парами точек, то при использовании координатной матрицы X и повернутой координатной матрицы Y результаты совпадут. Например, при использовании координат из X на рис. 2.9 расстояние между точками a и b есть $d_{ab} = [(-1,0-1,0)^2 + (1,0-1,0)^2]^{1/2} = 2,0$. При использовании координат из Y $d_{ab} = [(0,0 + 1,4)^2 + (1,4 - 0,0)^2]^{1/2} = 2,0$. Независимо от того, описано ли расположение точек координатами из X или координатами из Y, евклидовы расстояния между ними не меняются.

Вращение имеет матричное представление. Поворот набора точек соответствует умножению справа матрицы, представляющей эти точки, на матрицу преобразования. Матрица преобразования — это квадратная матрица с одной строкой и столбцом для каждой координаты X . Если умножить справа матрицу X , представленную на рис. 2.9, на матрицу преобразования T , представленную на рис. 2.11, то в результате получится матрица Y (см. рис. 2.10).

Каждый элемент матрицы преобразования T на рис. 2.11 соответствует углу между одной из координатных осей в X и одной из координатных осей в Y . Точнее, он равен косинусу угла между одной из координатных осей в X и одной из координатных осей в Y . Элемент $t_{11} =$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 Y & = & X & & T \\
 \\
 a & \begin{bmatrix} 0,00 & 1,42 \\ 1,42 & 0,00 \\ 0,00 & -1,42 \\ -1,42 & 0,00 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & -1,00 \\ -1,00 & -1,00 \end{bmatrix} & \text{I} & \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 \\ \begin{bmatrix} 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 \\
 b & \\
 \\
 c & \\
 \\
 d &
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 2.11 Матричное представление поворота четырех точек

$= 0,71$ в T на рис. 2.11 — косинус угла между первой координатной осью в X и первой координатной осью в Y , $\cos 45^\circ = 0,71$. Элемент $t_{12} = -0,71$ — косинус угла между координатной осью 1 в X и координатной осью 2 в Y , $\cos 135^\circ = -0,71$. В общем, каждая строка T соответствует координатной оси в X , а каждый столбец — координатной оси в Y . Элемент t_{rc} — косинус угла между координатной осью r в X и координатной осью c в Y .

T является матрицей ортогонального преобразования, если $T'T = TT' = I$. Вычислив произведения $T'T$ и TT' , читатель может убедиться, что матрица T на рис. 2.11 — матрица ортогонального преобразования. Если T — матрица ортогонального преобразования, то углы между координатными осями в Y будут теми же, что и углы между парами соответствующих координатных осей в X . Более того, евклидовы расстояния между парами точек при повороте не изменяются.

Если матрица координат стимулов Y является результатом поворота X , то X и Y — одна и та же конфигурация стимулов. Они представляют конфигурацию с разных точек зрения, в разных системах отсчета. Существует много аспектов, в которых можно рассматривать решение задачи многомерного шкалирования — конфигурацию X , и каждый соответствует одному из различных поворотов конфигурации. Важные свойства решения задачи многомерного шкалирования часто

более четко видны при одном повороте, чем при другом, так же, как те или иные детали статуи можно лучше рассмотреть в одной перспективе, чем в другой.

Какой из поворотов следует использовать для представления конфигурации стимулов? Эта проблема называется «проблемой вращения» или «вопросом вращения». Дальнейший анализ проблемы вращения мы отложим, чтобы обсудить сначала методы сбора данных и методы получения первоначальной матрицы координат X . Рассматривать матрицы поиска лучшего поворота координатной матрицы X до обсуждения методов получения X не имеет смысла.

ЗАДАЧИ

1. Найдите суммы матриц, указанные в пунктах а). б). в).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

- а) $S = A + B$;
 б) $S = C + A$;
 в) $S = B + C$.

2. По данным задачи 1 вычислите указанные разности матриц:

- а) $D = A - B$;
 б) $D = C - A$;
 в) $D = B - C$.

3. По данным задачи 1 найдите следующие матрицы:

- а) A' ;
 б) B' ;
 в) C' .

4. По данным задачи 1 решите следующие матричные уравнения относительно неизвестной матрицы X :

- а) $B' = A + B$;
 б) $A = B + X$;
 в) $B' = A - X$;
 г) $B = X - A$.

5. По данным задачи 1 выполните следующие скалярные умножения:

- а) $2(A) = P$;
 б) $(-1)C = P$;
 в) $(0,2)B = P$.

6. По данным задачи 1 вычислите следующие матричные произведения:

- а) $P = AB$;
 б) $P = B'C$;
 в) $P = A'C'$.

7. Ответьте на вопросы а) — ж), используя следующие матрицы:

$$a = (1, 2, 3), \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 & 3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Укажите:

- векторы-столбцы;
- единичные матрицы;
- диагональные матрицы;
- векторы-строки,
- квадратные матрицы;
- неквадратные прямоугольные матрицы;
- симметрические матрицы.

8. Покажите, что матрица B является обратной матрицы A , а матрица C не является обратной матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,0 \\ -0,5 & 1,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

9. Используя матрицы A , B и C из задачи 8, решите матричное уравнение $C = XA$ относительно неизвестной матрицы X .

10. Покажите, что матрица B в задаче 8 является обратной матрицы DD' , где

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. С помощью правой псевдообратной матрицы D решите матричное уравнение $C = XD$, где матрица C взята из задачи 8.

12. С помощью левой псевдообратной матрицы D' решите матричное уравнение $C = D'X$, где матрица C взята из задачи 8.

13. Ответьте на вопросы а) — г) относительно матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & 7 & 8 \\ 11 & 12 & 3 & 9 \\ 13 & 14 & 15 & 4 \end{bmatrix}.$$

Укажите:

- диагональные элементы A ;
- внедиагональные элементы A ;
- элементы нижнего треугольника A ;
- элементы верхнего треугольника A .

14. Для приведенных ниже координатных матриц X и Y ответьте на вопросы а) и б).

$$X = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1,5 & -1,0 \\ -0,5 & 1,0 \\ 0,5 & -1,0 \\ 1,5 & 1,0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad Y = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1,0 & -1,5 & -1,0 \\ 1,0 & -0,5 & 0,5 \\ -1,5 & 1,0 & 1,5 \\ 1,5 & 1,0 & -1,0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

- Начертите координатную матрицу X .
- Начертите координатную матрицу Y в виде набора двумерных изображений.

15. Найдите матричную форму изображения на рис. 2.12.

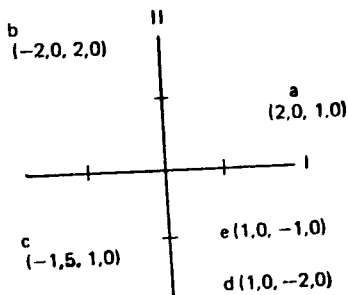


Рис. 2.12. Двумерное изображение для задачи 15

16. Найдите матричное представление трех координатных осей, изображенных на двумерных чертежах рис. 2.13.

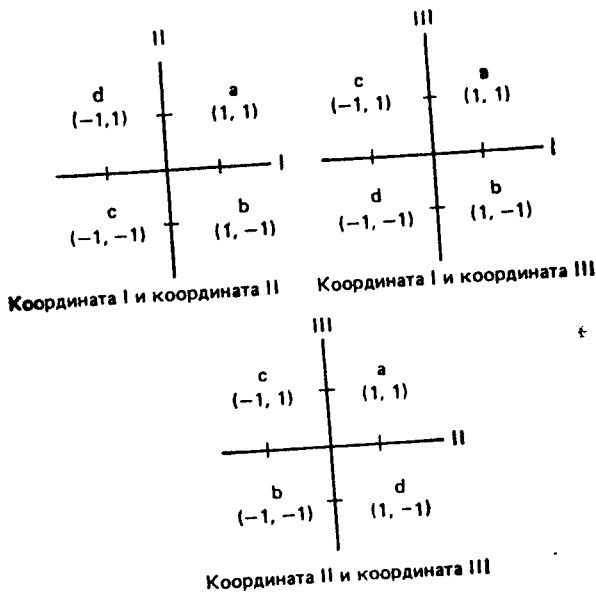


Рис. 2.13. Двумерные изображения для задачи 16

17. Имеются следующие матрицы:

$$X = \begin{bmatrix} -1,0 & -1,0 \\ -0,5 & 0,5 \\ 1,0 & -1,0 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0,50 & -0,87 \\ 0,87 & 0,50 \end{bmatrix}.$$

- а) Найдите поворот матрицы X с помощью матрицы T , $Y = XT$.
 б) Чему равен косинус угла между координатной осью I в X и координатной осью I в Y ?
 в) Чему равен угол между координатной осью I в X и координатной осью II в Y ?

г) Покажите, что T — матрица ортогонального преобразования.

18. Для векторов t_1, t_2, t_3 и матрицы X ответьте на вопросы а) — г):

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0,80 \\ 0,60 \\ 0,60 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} -0,60 \\ 0,80 \\ 0,60 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} -0,60 \\ 0,60 \\ 0,80 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 1,00 \end{bmatrix}.$$

а) Найдите матрицу преобразования T , образованную соединением векторов-столбцов t_1, t_2 и t_3 .

б) Найдите поворот Y с помощью матрицы T , $Y = XT$.

в) Найдите угол между координатной осью II в X и координатной осью II в Y .

г) Является ли T ортогональной? Обоснуйте ответ.

19. Координаты, приведенные на рис. 2.14, являются координатами точек по осям I и II. Предположим, что значения координат приведены с точностью до двух десятичных знаков.

а) Чему равен угол между осями I и 2?

б) Чему равен угол между осями II и 1?

в) Найдите матрицу X , содержащую координаты стимулов по осям I и II.

г) Найдите матрицу преобразований T , которую можно применить для преобразования координат X в координаты 1 и 2.

д) Вычислите $Y = XT$.

е) Является ли T ортогональной? Обоснуйте ответ.

20. С помощью программы факторного анализа методом главных компонент ответьте на следующие вопросы:

а) Найдите такую матрицу B (3×3), что $BB' = C$:

$$C = \begin{bmatrix} 3,00 & -1,00 & -1,00 \\ -1,00 & 1,00 & 1,00 \\ -1,00 & 1,00 & 3,00 \end{bmatrix}.$$

б) Каковы повернутые координаты B^* , если применить к матрице B вращение методом «варимакс»?

в) Найдите такую матрицу преобразования T , что $B^* = BT$.

г) Проверьте, что $B^* = BT$.

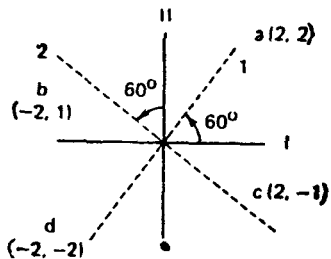


Рис. 2.14. Двумерное изображение для задачи 19

ОТВЕТЫ

1. а) $S = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 7 \\ 8 & 11 & 77 \end{bmatrix},$

б) $S = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \\ 13 & 13 & 6 \end{bmatrix}.$

$$b) S = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$2. a) D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b) D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix};$$

$$b) D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$3. a) A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix};$$

$$b) B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$b) C' = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$4. a) X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ -6 & -8 & -1 \end{bmatrix};$$

$$b) X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b) X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix};$$

$$r) X = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 7 \\ 8 & 11 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$5. a) P = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & 12 \\ 14 & 18 & 8 \end{bmatrix};$$

$$b) P = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -5 & -3 & -1 \\ -6 & -4 & -2 \end{bmatrix};$$

$$b) P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

$$= 6. a) P = \begin{bmatrix} 14 & 21 & 19 \\ 14 & 19 & 21 \\ 43 & 49 & 28 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } P = \begin{bmatrix} 28 & 16 & 4 \\ 35 & 21 & 7 \\ 27 & 17 & 7 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } P = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 28 \\ 14 & 27 & 40 \\ 32 & 47 & 62 \end{bmatrix}.$$

7. а) б; б) Е; в) Е, Н; г) а; д) **D, E, F, G, H**;

е) А, В, С; ж) D, E, H.

$$\text{8. а) } AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I;$$

$$\text{б) } AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I$$

или

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I.$$

$$\text{9. } X = CA^{-1} = CB = \begin{bmatrix} 0,50 & -1,00 & 0,25 \\ -0,50 & 2,00 & -0,25 \\ 0,00 & 0,00 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

$$\text{10. } DD' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A \text{ из задачи 8;}$$

$$AB = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{11. } X = CD' (DD')^{-1} = CD' B = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,5 & -0,5 \\ 1,0 & -1,5 & 0,5 \\ 0,0 & 0,5 & 0,0 \end{bmatrix};$$

$$D' (DD')^{-1} = D' B = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{12. } X = (DD')^{-1} DC = BDC = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,0 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,0 & 1,0 & -0,5 \end{bmatrix};$$

$$(DD')^{-1} D = BD = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,0 \\ -0,5 & -0,5 & 1,0 \\ -0,5 & 0,5 & 0,0 \end{bmatrix}.$$

13. а) $a_{11}=1, a_{22}=2, a_{33}=3, a_{44}=4$;

б) $a_{21}=10, a_{31}=11, a_{41}=13, a_{12}=5, a_{32}=12, a_{42}=14$;

$a_{13}=6, a_{23}=7, a_{43}=15, a_{14}=7, a_{24}=8, a_{34}=9$;

в) $a_{21}=10, a_{31}=11, a_{41}=13, a_{32}=12, a_{42}=14, a_{43}=15$;

г) $a_{12}=5, a_{13}=6, a_{14}=7, a_{22}=7, a_{24}=8, a_{34}=9$.

14. а) См. рис. 2.15; б) см. рис. 2.16.

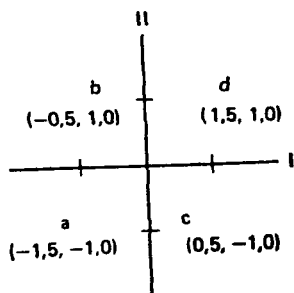
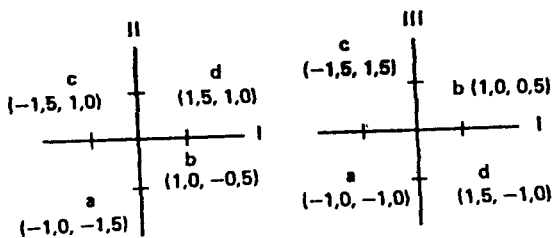


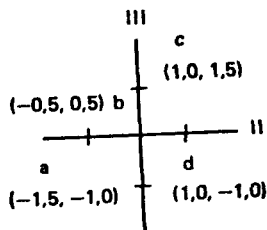
Рис. 2.15. Двумерное изображение для ответа к задаче 14а)

Координата I и координата II



Координата I и координата II

Координата I и координата III



Координата II и координата III

Рис. 2.16. Двумерные изображения для ответа к задаче 14б)

$$15. X = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2,0 & 1,0 \\ -2,0 & 2,0 \\ -1,5 & 1,0 \\ 1,0 & -2,0 \\ 1,0 & -1,0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$16. X = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$17. \text{ а) } Y = \begin{bmatrix} -1,37 & 0,37 \\ 0,19 & 0,69 \\ -0,37 & -1,37 \\ -0,69 & 0,19 \end{bmatrix};$$

б) косинус $\alpha = 0,50$;

в) косинус $\alpha = -0,87$, $\alpha = 150^\circ$ или $\alpha = 210^\circ$;

$$\text{ г) } T' T = T T' = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} = I.$$

$$18. \text{ а) } T = \begin{bmatrix} 0,80 & -0,60 & -0,60 \\ 0,60 & 0,80 & 0,60 \\ 0,60 & 0,60 & 0,80 \end{bmatrix};$$

$$\text{ б) } Y = \begin{bmatrix} 1,40 & 0,00 & 0,20 \\ 2,00 & 0,80 & 0,80 \\ 0,80 & -0,60 & -0,60 \\ 1,20 & 1,40 & 1,40 \end{bmatrix};$$

в) косинус $\alpha = 0,80$, $\alpha = 37^\circ$ или $\alpha = 323^\circ$;

г) нет, так как

$$T' T = \begin{bmatrix} 1,36 & 0,36 & 1,36 \\ 0,36 & 1,36 & 1,32 \\ 0,36 & 1,32 & 1,36 \end{bmatrix} \neq I$$

или потому, что

$$T T' = \begin{bmatrix} 1,36 & 0,36 & 0,36 \\ 0,36 & 1,36 & 1,32 \\ 0,36 & 1,32 & 1,36 \end{bmatrix} \neq I.$$

19. а) $\alpha = 150^\circ$; б) $\alpha = 330^\circ$;

$$\text{ в) } X = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2,00 & 2,00 \\ -2,00 & 1,00 \\ 2,00 & -1,00 \\ -2,00 & -2,00 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\text{ г) } T = \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,50 & -0,87 \\ 0,87 & 0,50 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\text{ д) } \begin{matrix} & \text{I} & \text{II} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2,74 & -0,74 \\ -0,13 & 2,24 \\ 0,13 & -2,24 \\ -2,74 & 0,74 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

e) да. $T' T = T T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$

20. a) $B = \begin{bmatrix} -1,40 & 1,00 & 0,17 \\ 0,79 & 0,00 & 0,62 \\ 1,40 & 1,00 & -0,17 \end{bmatrix}.$

б) $B^* = \begin{bmatrix} -0,24 & 1,65 & -0,46 \\ 0,31 & -0,31 & 0,90 \\ 1,65 & -0,24 & 0,46 \end{bmatrix}.$

в) $T = \begin{bmatrix} 0,63 & -0,63 & 0,44 \\ 0,71 & 0,71 & 0,00 \\ -0,31 & 0,31 & 0,90 \end{bmatrix}.$

г) $BT = B^* = \begin{bmatrix} -0,24 & 1,65 & -0,46 \\ 0,31 & -0,31 & 0,90 \\ 1,65 & -0,24 & 0,46 \end{bmatrix}.$

В большинстве работ по многомерному шкалированию матрица данных представляет собой квадратную симметрическую матрицу близости, каждая строка и каждый столбец которой соответствует одному стимулу. Элементом d_{ij} в i -й строке и j -м столбце матрицы близости является мера близости между стимулами i и j . Если не оговорено противное, то читатель должен считать, что d_{ij} — мера различия пары стимулов (i, j), а не мера сходства. Из данных, содержащихся в матрице близости, получают оценки координат стимулов x_{ik} и x_{jk} . Но как получить меру близости пары стимулов и как спланировать исследование для сбора таких мер? Эти вопросы и рассмотрены в данной главе. В основном объясняются четыре класса мер близости: прямые оценки различия, условные вероятности, совместные вероятности и индексы различия профилей. Так как в большинстве работ по многомерному шкалированию в качестве мер различия используются прямые оценки различия, мы начнем обсуждение с общего описания проблем, которые следует решить при планировании исследования для получения этих оценок.

ПРЯМЫЕ ОЦЕНКИ РАЗЛИЧИЯ

При планировании исследования по сбору оценок различий пар стимулов необходимо построить выборки стимулов и испытуемых, осуществить выбор задания для оценки и планирование инструментария (вопросника) для представления этого задания испытуемым.

Первым этапом получения прямых оценок различий является по возможности наиболее точное определение генеральной совокупности людей, у которых следует собирать оценки, и генеральной совокупности стимулов, которые нужно выбирать. Как только генеральная совокупность стимулов определена, исследователь должен попытаться построить случайную или стратифицированную случайную выборку стимулов. Если некоторые из стимулов генеральной совокупности неизвестны многим испытуемым, то может оказаться необходимым сузить избранную генеральную совокупность стимулов до известной всем испытуемым части. Испытуемые могут обоснованно оценить только те стимулы, с которыми они хорошо знакомы.

При отборе стимулов для стратификации выборки и обеспечения репрезентативности построенной выборки из генеральной совокупности стимулов очень полезны иногда существующие классификации этих стимулов. Например, классификационная система, разработанная в Словаре названий профессий службы занятости США [United States Employment Service Dictionary of Occupational Titles, 1977], может быть использована при выборе профессий для исследования восприятия профессий. Если стимулы — цели обучения в конкретной предметной области, то стратификацию можно провести на основе тем, соответствующих названиям глав в учебнике по данному предмету. Как правило, выборка должна содержать не менее пяти стимулов на каждую ожидаемую координатную ось.

На важность отбора стимулов ранее обращалось мало внимания, исключение составляет работа [Cohon and Jones, 1974]. Подозревают, что процесс отбора стимулов может оказать существенное влияние на полученное решение. Представим себе, например, исследование профессий. Если в выборку включены только «белые воротнички», то не следует ожидать появления координатной оси, соответствующей безопасности профессии, так как все профессии «белых воротничков» безопасны. С другой стороны, если выборка содержит профессии «синих воротничков», сопряженные с большим риском, такие, как шахтер или металлист, то можно ожидать появления оси безопасности занятий, поскольку профессии в выборке различаются по их безопасности.

Важными этапами в любом исследовании с применением многомерного шкалирования являются определение генеральной совокупности субъектов (испытуемых) и построение выборки из нее. Если некоторая часть генеральной совокупности субъектов не знакома со стимулами, которые надо исследовать, то исследователь может оказаться перед необходимостью ограничить генеральную совокупность теми, кто может обоснованно оценить все стимулы. Стратификация генеральной совокупности по таким переменным, как пол, возраст и уровень образования, может быть гарантией репрезентативности выборки.

Применяется такое эмпирическое правило: если различие пары объектов оценивается путем усреднения оценок различных испытуемых, то число M усредняемых оценок для каждой пары стимулов должно быть не менее чем $M = 40 K^*/(I - 1)$, где I — число стимулов, а K^* — ожидаемое число координатных осей. Если считать каждую оценку любой пары элементом данных, то это правило гарантирует, что при правильном предсказании размерности число элементов данных, входящих на каждый оцениваемый параметр x_{jk} , будет не менее 20^* .

* Поскольку в соответствии с этим правилом на каждую пару стимулов приходится не менее $40 K^*/(I - 1)$ оценок, а число пар — $I(I - 1)/2$, общее число оценок не менее чем $\{40 K^*/(I - 1)\} [I(I - 1)/2] = 20 IK^*$, т. е. в 20 раз больше, чем число оцениваемых параметров, равное IK^* . — *Примеч. пер.*

Задание для оценки

После построения выборок стимулов и испытуемых экспериментатор должен решить, какой тип задания для оценки различий следует дать испытуемым. В литературе встречаются различные виды заданий. Здесь описаны четыре из них: оценка величины различия, категориальная оценка, графическая оценка и категориальная сортировка.

В задании по оценке величины различия [Stevens, 1971] одна пара стимулов выбирается в качестве стандарта. Испытуемый должен приписать каждой оцениваемой паре число, показывающее степень различия этой пары относительно различия стандартной пары. Например, если испытуемый считает, что оцениваемая пара в два раза более различна, чем стандартная пара, то он припишет оцениваемой паре число 2. Если же испытуемый считает, что различие оцениваемой пары составляет две трети от различия стандартной пары, то он припишет оцениваемой паре число $2/3$.

Для любой оцениваемой пары в качестве оценки различия берется среднее геометрическое (реже медиана) приписанных чисел. Степень различия стандартной пары по сравнению с другими оцениваемыми парами стимулов не должна быть ни слишком высокой, ни слишком низкой. Хотя задание по оценке величины различия иногда трудно объяснить испытуемым с невысоким интеллектом, оно обычно дает хорошие результаты [Bass et al., 1974].

Для получения прямых оценок различий наиболее часто прибегают к категориальным оценкам. В этом случае испытуемому предъявляют пару стимулов следующим образом:

		Максимально похожи				Максимально различны			
Гарвардский университет (Гарвард)	Йейльский университет (Йейл)	(0)	(1)	(2)	(3)	$\sqrt{\quad}$ (4)	(5)	(6)	(7)

Ему дается задание указать, насколько похожими (или различными) он считает пару стимулов, и отметить соответствующую категорию на шкале оценок. Часто хорошие результаты дает шкала, содержащая от шести до девяти категорий.

Обычно каждой категории приписывается целое число, и ответом испытуемого считается число, приписанное отмеченной категории. В приведенном выше примере категориям могут быть приписаны целые числа, приведенные в скобках ниже шкалы оценок. Показанный в этом примере ответ получит оценку 4. В качестве оценки различия пары берется среднее арифметическое оценок, приписанных ей всеми испытуемыми.

Метод шкалы графической оценки очень похож на метод категориальной оценки. В этом случае испытуемому предъявляется пара стимулов так:

Испытуемый должен, как это показано выше, перечеркнуть шкалу в точке, расстояние от которой до левого края шкалы соответствует различию между двумя оцениваемыми стимулами. В данном примере это расстояние равно 6 см. Если необходимо объединить ответы нескольких субъектов, то в качестве оценки меры различия двух стимулов берется среднее арифметическое (реже медиана). Измерять на графике ответы каждого испытуемого линейкой очень неудобно.

Второй вариант метода получения категориальной оценки — категориальная сортировка. В этой процедуре каждая пара стимулов представлена на отдельной карточке. Испытуемый помещает каждую пару в одну из нескольких упорядоченных категорий. Он должен отнести пары очень похожих стимулов к самой низкой категории. Самая высокая категория содержит пары, которые совсем не похожи. Для того чтобы в одной категории не оказалось слишком большого числа пар, экспериментатор может установить, сколько категорий следует использовать испытуемому (часто от шести до девяти) и какую часть пар стимулов помещать в каждую из них.

Оценки различия по категориальной сортировке получаются так же, как и в задачах по категориальной оценке. Каждой категории приписывается целое число, а оценка субъекта — число, соответствующее категории, в которую помещена пара. Для каждой пары различием считается среднее арифметическое приписанных ей оценок.

Кратко резюмируя, отметим, что для получения прямых оценок различий исследователь может выбрать по крайней мере четыре типа задания для оценки: оценка величины, категориальная оценка, графическая оценка и категориальная сортировка. Выбрать один из этих методов можно, рассмотрев практические проблемы, возникающие при использовании каждого из них, и оценив способности и желание испытуемых выполнять различные задания. Для оценки этих факторов часто необходимо небольшое пилотажное (пробное) исследование.

Планирование инструментария

Определив тип задания, экспериментатор должен продумать, как представить его испытуемому. Пары стимулов, которые необходимо оценить, следует упорядочить в логическую последовательность. Испытуемые должны получить соответствующую инструкцию. Затем экспериментатор должен решить, будет ли он использовать полный план, когда каждый испытуемый оценивает все возможные пары стимулов, или неполный, когда каждый испытуемый оценивает только одно подмножество пар стимулов. В этом параграфе приведен краткий обзор нескольких психологических исследований, позволяющих разрешить

следующие возникающие при планировании инструментария (вопросника) проблемы: упорядочение пар стимулов, подготовка инструкций и использование неполных планов.

Упорядочение пар стимулов

Психологи предполагают, что существуют два фактора, влияющие на оценки испытуемых, и их следует учитывать при выборе логической последовательности пар стимулов. Порядок предъявления стимулов в паре (т. е. Гарвард — Йейл или Йейл — Гарвард) явно влияет на оценки сходства этих двух стимулов (Tversky, 1977; Zinnes and Wolff, 1977). Такое влияние называется *пространственным эффектом*. Говорят, что пространственные эффекты для данного стимула сбалансированы, если в одной половине включающих этот стимул пар он является первым, а в другой — вторым. Пары стимулов должны представляться таким образом, чтобы для каждого оцениваемого стимула пространственные эффекты были сбалансированы.

Временные эффекты — это эффекты, связанные с упорядочением пар стимулов в списке оцениваемых пар. Говорят, что временные эффекты для данного стимула сбалансированы, если пары, в которые включен этот стимул, расположены в списке равномерно. В идеале временные эффекты должны быть сбалансированы для каждого стимула.

Р. Росс [Ross, 1934] описывает метод для определения такого расположения и упорядочения пар стимулов, когда сбалансированы как пространственные, так и временные эффекты. Это называется *упорядочением Росса*. Дж. Коген и М. Дэйвисон [Cohen and Davison, 1973] написали программу, использующую метод Росса для определения оптимального упорядочения и расположения пар стимулов. Программа печатает вопросник, в котором все возможные пары представлены в оптимальном порядке и испытуемого просят дать категориальную оценку каждой пары. Экспериментаторам, желающим познакомиться с деталями метода Росса, следует обратиться к оригиналу.

На рис. 3.1 показано упорядочение Росса для всех возможных пар семи учебных заведений. Гарвардский университет, Йейльский университет, Антиок-колледж, Калифорнийский университет, Мичиганский университет, Массачусетский технологический институт (МТИ) и технологический институт Джорджии. Появляющийся стимул «Гарвард» обведен кружком. Он равномерно расположен среди 21 пары. Отметим, что этот стимул появляется в левой части трех пар и столько же раз в правой части. Пространственные и временные эффекты оптимально сбалансированы.

Альтернативой упорядочению Росса является случайное упорядочение, когда пары стимулов предъявляются в случайном порядке. Для каждой пары экспериментатор посредством какого-либо случайного процесса типа бросания монеты решает, какой из двух стимулов появится первым. В этой процедуре решение об упорядочении стимулов

состоит из двух этапов — упорядочения пар и случайного выбора каждого члена пары. Случайное упорядочение пар не гарантирует балансирования пространственных временных эффектов.

Третий метод — метод чередующегося стандарта — очень прост для реализации. Если есть I стимулов, пронумерованных $1, \dots, i, \dots, I$,

	Максимально похожи	Максимально различны
Гарвард-Йейл	_____	_____
Джорджия-Антиок	_____	_____
МТИ — Калифорния	_____	_____
Мичиган-Гарвард	_____	_____
Антиок-Йейл	_____	_____
Калифорния-Джорджия	_____	_____
Мичиган-МТИ	_____	_____
Гарвард-Антиок	_____	_____
Йейл-Калифорния	_____	_____
Джорджия-Мичиган	_____	_____
МТИ-Гарвард	_____	_____
Калифорния-Антиок	_____	_____
Мичиган-Йейл	_____	_____
МТИ-Джорджия	_____	_____
Гарвард-Калифорния	_____	_____
Антиок-Мичиган	_____	_____
Йейл-МТИ	_____	_____
Джорджия-Гарвард	_____	_____
Калифорния-Мичиган	_____	_____
Антиок-МТИ	_____	_____
Йейл-Джорджия	_____	_____

Рис 3.1. Упорядочение Р. Росса пар стимулов

то задание по упорядочению пар делится на $(I - 1)$ разделов. В i -м разделе стандартом служит стимул i . Задача испытуемого — дать в i -м разделе оценку сходства между стандартом и каждым из стимулов, пронумерованных от $(i + 1)$ до I .

На рис. 3.2 показаны две страницы из вопросника, составленного по методу чередующегося стандарта. Обычно номеров разделов в вопроснике нет. На рисунке они включены только с целью помочь обсуждению. Стимулы пронумерованы так, как показано в верхней части

рисунка. Отметим, что в разделе I стимул 1 (Гарвард) сравнивается с каждым из шести оставшихся стимулов. В разделе II стимул 2 (Йейл) сравнивается со всеми стимулами, кроме первого. Сравнивать Йейл с первым стимулом нет необходимости, так как это сравнение было проведено в разделе I. В разделе III стимул 3 (Антиок-колледж) сравнивается со стимулами 4—7. Нет необходимости сравнивать этот стимул ни с одним из первых двух, так как такое сравнение было проведено в разделах I и II. В этом методе не сбалансированы ни пространственные, ни временные эффекты.

Поскольку упорядочение Росса балансирует пространственные и временные эффекты, то это — лучший план. Следующим по качеству является случайное упорядочение. Если экспериментатор не знает, что пространственные и временные эффекты будут минимальными, то основой для рекомендации метода чередующегося стандарта будет только его рациональность.

Инструкции

Психологи предполагают, что оценки испытуемого могут измениться в зависимости от того, что он ожидает увидеть в наборе стимулов. Инструкции можно использовать для стандартизации ожиданий каждого испытуемого, если попросить испытуемых прочесть весь список стимулов после чтения инструкции, но до начала оценивания. Если читать весь список стимулов слишком неудобно, то испытуемые могут прочесть представительную выборку из него, чтобы понять, какие стимулы они будут оценивать.

Инструкции могут ограничивать характеристики, которые экспериментатор считает важными для оценок. Испытуемых можно попросить не принимать во внимание не относящиеся к делу характеристики, например, такие, как длина слова, обозначающего стимул. Некоторые из характеристик, по которым изменяются стимулы, иногда не имеют отношения к целям исследователя. Испытуемых можно попросить оценивать учебные заведения в предположении, что они будут приняты в каждое из них и получают полную финансовую поддержку. Такое предположение, включенное в инструкцию, позволяет испытуемому игнорировать две возможные характеристики: трудность поступления и оплата образования. Исследователь может указать некоторые из характеристик, которые следует рассмотреть. Например, испытуемого, оценивающего учебные заведения, можно попросить рассмотреть только те характеристики, которые повлияли бы на решение учиться в одном из них, а не в другом.

Неполные планы

При увеличении числа стимулов I число возможных пар, $\frac{1}{2} I(I-1)$, быстро увеличивается. При 10 стимулах число пар

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1. Гарвард | 5. Мичиганский университет |
| 2. Йейл | 6. Массачусетский технологический институт |
| 3. Антиок — колледж | 7. Технологический институт Джорджии |
| 4. Калифорнийский университет | |

	Раздел I		Страница 1	
Гарвард	Максимально похожи		Максимально различны	
Йейл	_____	_____	_____	_____
Антиок	_____	_____	_____	_____
Калифорния	_____	_____	_____	_____
Мичиган	_____	_____	_____	_____
МТИ	_____	_____	_____	_____
Джорджия	_____	_____	_____	_____
	Раздел II			
Йейл	Максимально похожи		Максимально различны	
Антиок	_____	_____	_____	_____
Калифорния	_____	_____	_____	_____
Мичиган	_____	_____	_____	_____
МТИ	_____	_____	_____	_____
Джорджия	_____	_____	_____	_____

Рис. 3.2. Упорядочение пар

равно 45. Удвоение числа стимулов до 20 увеличивает число пар примерно в 4 раза — до 190. Число стимулов часто так велико, что нельзя ожидать от испытуемого всех оценок. В таких случаях экспериментатор может использовать неполный план, в котором каждая пара стимулов оценивается не всеми испытуемыми. В неполном плане стимулы делятся на подмножества, и каждый испытуемый оценивает пары только в одном подмножестве. Каждое из подмножеств оценивается одинаковым числом испытуемых.

Как же разделить пары на подмножества? В работах [MacCallum, 1979; Spence and Domoney, 1974] высказано предположение, что случайное деление пар на подмножества не хуже всякого другого способа. Каждая пара должна появиться в одинаковом числе подмножеств. Если возможно, каждый из стимулов должен появиться по крайней мере в одной паре каждого подмножества. Частично пересекающиеся подмножества дают хорошие результаты, но они не являются необходимыми. Оценки координат стимулов должны быть адекватными, пока

Антиок	Максимально похожи	Максимально различны
Калифорния	_____	_____
Мичиган	_____	_____
МТИ	_____	_____
Джорджия	_____	_____

Раздел IV

Калифорния	Максимально похожи	Максимально различны
Мичиган	_____	_____
МТИ	_____	_____
Джорджия	_____	_____

Раздел V

Мичиган	Максимально похожи	Максимально различны
МТИ	_____	_____
Джорджия	_____	_____

Раздел VI

МТИ	Максимально похожи	Максимально различны
Джорджия	_____	_____

методом чередующегося стандарта

каждую пару оценивает не меньше чем $M = 40K^*/(I - 1)$ испытуемых [MacCallum, 1979; Spence and Domoney, 1974].

Выводы

Те, кто хочет использовать оценки различий в исследовании с применением многомерного шкалирования, должны при планировании исследования рассмотреть следующие вопросы. Во-первых, следует определить совокупность стимулов и совокупность испытуемых и создать план для построения адекватных выборок тех и других. Во-вторых, нужно выбрать задание для оценки. Хорошие результаты дают методы оценки величины, категориальной оценки, графической оценки и категориальной сортировки. В-третьих, исследователю необходимо продумать инструментарий для предъявления задания испытуемым. При разработке такого инструментария экспериментатор упорядочивает пары стимулов таким образом, чтобы пространственные и временные

эффекты были сбалансированы, насколько это возможно. Из инструкции все испытуемые должны получить одинаковое представление о наборе стимулов, которые будут оцениваться. Если необходимо, в инструкции должно быть сказано, что испытуемым следует игнорировать не относящиеся к делу характеристики стимулов. Если число стимулов велико, экспериментатору следует разработать неполный план, в котором каждый испытуемый будет оценивать только небольшое подмножество пар стимулов.

УСЛОВНЫЕ И СОВМЕСТНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В качестве мер близости стимулов использовались различные типы матриц условной и совместной вероятности. В исследованиях, где применяются условные вероятности, в качестве меры сходства стимулов (или событий) i и j служит вероятность того, что стимул (событие) j встречается при наличии стимула (события) i . В исследованиях, где применяются совместные вероятности, в качестве меры сходства стимулов (событий) i и j берется вероятность того, что стимулы (события) i и j встречаются вместе. Такие вероятности рассматриваются, как меры сходства, а не различия. В следующем параграфе обсуждаются некоторые виды исследований, порождающих матрицы вероятностей для анализа с применением многомерного шкалирования. Изложение начинается с описания исследований, приводящих к условным вероятностям.

Условные вероятности

Результаты исследований по узнаванию и переходу могут быть использованы для получения применяемых в многомерном шкалировании матриц условных вероятностей. Цель исследований по узнаванию — понять, какие виды ошибок делают люди при идентификации и классификации объектов. С помощью многомерного шкалирования можно определить характеристики сходства, ведущие к путанице одного стимула с другим и отсюда к ошибкам в идентификации. Исследования по узнаванию состоят из большого числа опытов. В каждом опыте экспериментатор предъявляет стимул в зрительном или слуховом виде и просит испытуемого указать название этого стимула. Затем для каждой пары (i , j) экспериментатор может сосчитать долю опытов, в которых предъявлен стимул i , а испытуемый ответил, что это стимул j . Условная вероятность, вероятность того, что при предъявлении стимула i был назван стимул j , может быть взята в качестве меры сходства между стимулом i и стимулом j . В тех случаях, когда ответ j не соответствует стимулу i , происходит ошибка. Такие ошибки анализируются в исследованиях по узнаванию.

Если матрица вероятностей определена в эксперименте по узнаванию, то ее строки соответствуют стимулам. Столбцы соответствуют

ответам. Элемент p_{ij} в строке i и столбце j матрицы — доля ответов, в которых предъявлен стимул i , а в качестве ответа назван стимул j . Диагональные элементы матрицы соответствуют опытам, в которых дан верный ответ, а внедиагональные элементы — опытам с ошибочным ответом, т. е. когда $i \neq j$, и поэтому ответ не соответствует стимулу. Анализируются только внедиагональные элементы.

При таком анализе предполагается, что чем более похожи два стимула, тем более вероятно, что они будут спутаны. Следовательно, в качестве меры сходства стимулов i и j может быть взята вероятность p_{ij} того, что при предъявлении стимула i был дан ответ j . Такие матрицы, вообще говоря, не симметрические, т. е. $p_{ij} \neq p_{ji}$. Самый простой способ построить симметрическую матрицу близости — создать новую меру сходства, взяв сумму двух значений p_{ij} и p_{ji} : $\delta_{ij} = p_{ij} + p_{ji}$.

На рис. 3.3 показано, как может выглядеть такая матрица. Это гипотетические данные, полученные из эксперимента, в котором детям показывали написанные буквы и просили их назвать. Строки соответствуют предъявляемым буквам, а столбцы — ответам. Каждый элемент в P — доля случаев, в которых был предъявлен стимул-строка, а в качестве ответа был назван стимул-столбец. Например, элемент в строке 4, столбец 3, показывает, что в 40 % случаев, когда был предъявлен стимул Е, в качестве ответа назван стимул F. Матрица Δ на рис. 3.3 — матрица сходства, полученная из матрицы смешения P . Каждый элемент Δ , δ_{ij} , вычислен следующим образом: $\delta_{ij} = \delta_{ji} = p_{ij} + p_{ji}$.

Другой вид матриц условной вероятности, которые можно анализировать с применением многомерного шкалирования, — матрицы перехода. Строки в таких матрицах соответствуют состояниям в момент начала чего-либо, а столбцы — состояниям в момент окончания. Каждый элемент матрицы p_{ij} обозначает долю наблюдений, находившихся в начальный момент в состоянии i , а в конечный момент в состоянии j . Здесь предполагается, что чем ближе состояния, тем более вероятен переход наблюдения из одного в другое. Цель многомерного шкалиро-

		Ответ				
		С	G	F	E	
P =	Стимул	C	0,60	0,40	0,00	0,00
		G	0,25	0,75	0,00	0,00
		F	0,00	0,00	0,50	0,50
		E	0,00	0,00	0,40	0,60
Δ =		C	--	0,65	0,00	0,00
		G	0,65	--	0,00	0,00
		F	0,00	0,00	--	0,90
		E	0,00	0,00	0,90	--

Рис. 3.3. Гипотетическая матрица смешения P и полученная из нее матрица сходства Δ

вания — найти характеристики сходства, связанные с такими переходами.

Матрицы перехода несимметрические. И в данном случае самый простой способ построения симметрической матрицы близости — создать новую матрицу с элементами $\delta_{ij} = \delta_{ji} = p_{ij} + p_{ji}$.

На рис. 3.4 показана гипотетическая матрица перехода и полученная из нее матрица сходства. Строки соответствуют специальностям в колледже при поступлении студентов, а столбцы — специальностям

		Специальность при окончании				
		М	Би	Бз	П	
Специальность при поступлении	Основы медицины (М)	0,30	0,20	0,40	0,10	
	Биология (Би)	0,20	0,30	0,10	0,40	
	Бизнес (Бз)	0,05	0,10	0,70	0,15	
	Педагогика (П)	0,02	0,08	0,30	0,60	
		М	Би	Бз	П	
$\Delta =$		М	--	0,40	0,45	0,12
		Би	0,40	--	0,20	0,48
		Бз	0,45	0,20	--	0,45
		П	0,12	0,48	0,45	--

Рис. 3.4. Матрица перехода P и полученная из нее матрица сходства Δ

тех же студентов при окончании. Каждый элемент p_{ij} — доля студентов, объявивших при поступлении специальность i , а окончивших колледж по специальности j . Например, элемент в строке 2, столбец 4, показывает, что 40 % студентов, объявивших при поступлении своей специальностью биологию, заканчивали как педагоги. Диагональные элементы в P и Δ при анализе будут игнорироваться. Δ — это матрица сходства, составленная из величин $\delta_{ij} = \delta_{ji} = p_{ij} + p_{ji}$.

Исследования социального взаимодействия также могут породить условные матрицы вероятностей. Строки и столбцы соответствуют людям или общественным организациям. Элемент p_{ij} в матрице условного взаимодействия — доля взаимодействий по инициативе лица i (или организации i) с лицом (или организацией) j . Обычно такие матрицы несимметрические. И снова самым простым способом построения сим-

метрической матрицы близости Δ будет образование элементов $\delta_{ij} = p_{ij} + p_{ji}$. При этом предполагается, что стимул i более склонен начинать взаимодействия со стимулами, похожими на него. Поэтому p_{ij} и δ_{ij} отражают сходство между взаимодействующими лицами (организациями) i и j .

При построении матриц сходства, являющихся исходными данными для многомерного шкалирования, могут быть использованы и другие типы матриц условной вероятности, если эти условные вероятности построены так, что они отражают близость между объектами. Поскольку матрицы условной вероятности практически никогда не бывают симметрическими, исследователь должен изобрести способ построения симметрических матриц близости из асимметрических матриц условной вероятности.

Однако при построении симметрических матриц из несимметрических матриц условной вероятности может быть потеряна важная информация. Асимметрии могут возникнуть из-за того, что отношения между двумя объектами существенно асимметричны. При построении симметрических матриц исследователь может потерять содержащуюся в вероятностях информацию о невзаимном характере взаимоотношений объектов и поэтому полученное МШ-решение не будет отражать эту асимметрию. Например, матрица P на рис. 3.4 показывает, что вероятность перехода от медицины к бизнесу 0,40, а от бизнеса к медицине намного меньше — 0,05. Эта асимметрия не отражается и не будет отражена в расстоянии между медициной и бизнесом на многомерной шкале четырех специальностей. Если симметрическая матрица близости порождена из условных вероятностей, то результирующая многомерная шкала может отображать многие важные свойства стимулов, но не те, которые связаны с асимметричностью.

Совместные вероятности

Совместные вероятности разного типа также могут быть индикаторами сходства между парами объектов. Так как по определению совместные вероятности симметричны, они всегда удовлетворяют по крайней мере одному требованию к матрице данных для многомерного шкалирования.

Исследования по социальному взаимодействию, результатом которых могут быть несимметрические матрицы условных вероятностей, иногда позволяют также получить симметрические матрицы совместных вероятностей. Строки и столбцы в матрице совместного взаимодействия представляют взаимодействующие элементы. Элемент p_{ij} в матрице совместного взаимодействия — доля взаимодействий, включающих элементы i и j . Так как матрица симметрична, она может служить в качестве матрицы сходства для анализа с применением многомерного шкалирования. Предполагается, что если элементы i и j очень похожи,

то они более склонны взаимодействовать. Такие матрицы совместного взаимодействия представляют только один возможный тип матриц совместной вероятности для МШ-анализа.

Исследование, проведенное Американской психологической ассоциацией (АПА) [Adkins, 1973], содержит еще один пример матрицы совместной вероятности. Хотя, насколько мне известно, эта матрица не обрабатывалась с помощью многомерного шкалирования. Было подсчитано число членов АПА, состоящих одновременно в каждой из всех возможных пар ее подразделений. Исследование привело к большой матрице совместных вероятностей P , содержащей по одному элементу для каждой пары подразделений. Элемент p_{ij} представляет долю членов, состоящих одновременно в подразделениях i и j . Матрица совместных вероятностей могла быть непосредственно подвергнута МШ-анализу для получения пространственного представления структуры подразделений АПА. Такая матрица называется *матрицей совместной встречаемости*, так как каждый ее элемент соответствует совместной встречаемости двух событий — членству одного и того же лица в двух подразделениях.

Матрица совместных вероятностей в исследовании АПА была построена по записям ассоциации. Однако матрицы совместной встречаемости могут быть получены и другим способом. С. Розенберг и его сотрудники [Rosenberg et al., 1968] построили матрицу совместных вероятностей для прилагательных, обозначающих черты характера, попросив испытуемых подумать о своих знакомых. Затем испытуемому был дан список черт характера. Испытуемые присваивали каждому из черт тому человеку из списка своих знакомых, которого эта черта наилучшим образом характеризовала. Мера сходства черт i и j получалась путем подсчета общего числа (или доли) знакомых, которым приписаны обе черты. Например, если испытуемый назвал 100 знакомых и 47 из них охарактеризовал как проницательных и интеллигентных, то мерой сходства между чертами «проницательность» и «интеллигентность» может быть число 47 или соответствующая дробь 0,47.

Метод Розенберга связан со следующим заданием испытуемым: рассортировать черты характера на категории, причем каждая категория соответствует одному из знакомых испытуемого. Категориальная сортировка может быть применена к стимулам любой природы, т. е. испытуемым можно дать задание рассортировать набор стимулов на номинальные категории таким образом, чтобы стимулы в любой из категорий были в некотором смысле похожи друг на друга и отличались в том же смысле от стимулов во всех других категориях. Испытуемому либо можно предоставить свободу в выборе числа категорий, либо экспериментатор может ограничить это число. Часто хорошие результаты дают от 5 до 10 категорий для каждого испытуемого. Как и в случае прямых оценок различий, инструкции должны разъяснять испытуемым вопросы, которые экспериментатор считает необходимым разъяснить.

Мерой сходства любой пары стимулов становится число (или доля) испытуемых, поместивших эти два стимула в одну категорию. Так как задание по разделению на категории требует от испытуемого оценки одиночных стимулов, а не пар, оно может быть использовано в качестве основы для шкалирования большого числа стимулов (до 200) без особой перегрузки испытуемых.

Задание Розенберга, называемое здесь заданием сортировки стимулов, отличается от задания категориальной сортировки, описанного в параграфе прямых оценок различий. Во-первых, при категориальной сортировке испытуемый должен разделять по категориям пары стимулов, а не одиночные стимулы. Во-вторых, при категориальной сортировке категории упорядочены по сходству от категории наиболее похожих стимулов до категории наименее похожих. При сортировке стимулов категории полностью номинальные. На первый взгляд категориальная сортировка и сортировка стимулов очень похожи. На самом же деле они сильно различаются, и путать их не следует. В работах [Davison, 1972; Rosenberg and Kim, 1975] обсуждаются методологические проблемы сортировки стимулов.

Подводя итоги, заметим, что матрицы вероятностей различного вида являются альтернативой прямых оценок различий в МШ-исследованиях. Одна из таких альтернатив — матрицы условных вероятностей, в том числе матрицы перехода. Поскольку такие матрицы условных вероятностей несимметрические, необходимо до применения к ним многомерного шкалирования построить из матрицы условных вероятностей симметрическую матрицу близости. При этом может быть потеряна часть информации об асимметричности отношений между объектами. Другая альтернатива прямым оценкам различий — матрицы совместных вероятностей. Один из методов получения матриц совместных вероятностей — сортировка стимулов, предложенная С. Розенбергом. Метод сортировки стимулов может применяться для шкалирования большого числа стимулов без перегрузки испытуемых.

МЕРЫ РАЗЛИЧИЯ ПРОФИЛЕЙ

После получения профиля оценок набора объектов эти оценки могут быть использованы для подсчета мер различия профилей. Профиль — это просто набор количественных признаков объекта. Если под объектом понимается человек, то количественными признаками могут быть его оценки по различным тестам. Или если объекты — города, то профиль каждого мог бы состоять из записей температуры в 10 различных моментов года.

В табл. 3.1 приведен процент безработных в пяти сферах занятости за пять различных лет. Каждая строка таблицы — профиль оценок соответствующей сферы занятости. В этом параграфе будем предполагать, что профили оценок объектов расположены в виде матрицы, таковой, как табл. 3.1, где строки соответствуют объектам, а столбцы —

признакам. Если матрица V содержит профили, то v_{ik} — k -й признак объекта i .

Таблица 3.1. Проценты безработных в пяти сферах занятости за пять различных лет

Сфера занятости	Год				
	1	2	3	4	5
Работающие по найму	5,7	4,3	4,8	4,8	5,7
Горнодобывающая промышленность	9,7	5,4	3,1	2,9	2,9
Перерабатывающая промышленность	6,2	4,0	5,6	4,3	5,7
Строительство	13,5	10,1	9,7	8,8	10,6
Финансы, страхование, торговля недвижимостью	2,4	2,3	2,8	2,7	3,1

Были предложены различные меры сходства профилей [Arabic and Boorman, 1973; Rosenberg and Jones, 1972; Sneath and Sokal, 1973], но наиболее часто применяемая мера — расстояние

$$\delta_{ij} = \left[\sum_k (v_{ik} - v_{jk})^2 \right]^{1/2}. \quad (3.1)$$

В некоторых случаях различие определяется как квадрат этой величины:

$$\delta_{ij}^2 = \sum_k (v_{ik} - v_{jk})^2. \quad (3.2)$$

В этих выражениях v_{ik} и v_{jk} представляют собой значения k -го признака в профилях i -го и j -го объектов. Мерой сходства профилей объектов i и j является δ_{ij} (или δ_{ij}^2).

В (3.1) сумма получается путем сложения квадратов разностей между соответствующими элементами в i -й и j -й строках матрицы V . Например, мера различия первых двух объектов (работающие по найму, рабочие в горнодобывающей промышленности) в табл. 3.1 будет

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \left[\sum_k (v_{1k} - v_{2k})^2 \right]^{1/2} = \\ &= [(5,7 - 9,7)^2 + (4,3 - 5,4)^2 + (4,8 - 3,1)^2 + \\ &\quad + (4,8 - 2,9)^2 + (5,7 - 2,9)^2]^{1/2} = 5,62. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Чтобы получить полную матрицу различий, величины δ_{ij} рассчитывают для всех пар объектов.

Исследователи по-разному применяли меру расстояния между профилями. Иногда до расчета мер различия элементы V преобразуются

к стандартизованному по столбцам виду. Матрица данных называется *стандартизованной по столбцам*, если среднее значение элементов каждого столбца равно 0,0, а дисперсия элементов каждого столбца равна 1,0. Если исследователь верит, что средние и дисперсии столбцов с содержательной точки зрения не важны, то может быть построена новая матрица Z , в которой каждый элемент будет в виде $z_{ik} = (1/s_k)(v_{ik} - v_{.k})$. Здесь $v_{.k}$ и s_k — среднее и среднеквадратичное отклонение элементов k -го столбца. Различия затем будут подсчитываться для элементов стандартизованной по столбцам матрицы Z , а не V . Средние и дисперсии шкал субъективных оценок и многих психологических тестов часто рассматриваются как произвольные. Если профили состоят из таких переменных, то уместна стандартизация данных по столбцам.

В психологических исследованиях данные часто бывают центрированными или стандартизованными по строкам. Матрица данных называется *центрированной по строкам*, если среднее элементов каждой строки равно 0,0. Она называется *стандартизованной по строкам*, если среднее элементов каждой строки равно 0,0, а дисперсия элементов каждой строки равна 1,0. Поступать таким образом предложено в работе Л. Кронбаха [Cronbach, 1955]. Кронбах различает три аспекта профилей — уровень, разброс и форму. Уровень — это просто среднее профиля v_i . Разброс — распределение оценок в профиле относительно их среднего. Для количественной оценки разброса может быть использовано среднеквадратичное отклонение s_i . Под формой понимается, нестрого говоря, ранговый порядок оценок в профиле.

Для того чтобы центрировать оценки в профиле по строкам, надо вычислить матрицу \tilde{V} с элементами $\tilde{v}_{ik} = v_{ik} - v_{i.}$, т. е. вычесть из каждого элемента V среднее значение соответствующей строки. Чтобы стандартизовать V по строкам, надо вычислить матрицу Z с элементами $z_{ik} = (1/s_i)(v_{ik} - v_{i.})$, где $v_{i.}$ и s_i — среднее и среднеквадратичное отклонение элементов профиля i .

Если различия δ_{ij} подсчитываются по первоначальной матрице V , то эти различия будут отражать сходство уровня, разброса и формы профилей i и j . Однако если использована центрированная по строкам матрица \tilde{V} , то различия будут отражать только разброс и форму профилей. Никакое различие в уровнях профилей в δ_{ij} отражено не будет. Если применять стандартизованную по строкам матрицу Z , то δ_{ij} будут отражать только различия в форме. Никакие различия в уровне и разбросе в δ_{ij} отражаться не будут. От того, какие из аспектов профилей — уровень, разброс и форма — важны для исследователя, зависит, следует ли матрицу V центрировать или стандартизовать по строкам.

Если δ_{ij} подсчитано для стандартизованной по строкам матрицы Z , то δ_{ij}^2 линейно зависит от r_{ij} — коэффициента корреляции между элементами i -й и j -й строк первоначальной матрицы V . Точнее, $\delta_{ij}^2 = 2K - 2Kr_{ij}$. Это означает, что многие процедуры многомерного

шкалирования дадут один и тот же результат независимо от того, идет ли на входе матрица сходства R с элементами $(r_{ij})^{1/2}$ или матрица различий Δ , составленная из элементов δ_{ij} , подсчитанных для стандартизированной по строкам матрицы профилей Z .

Мера различия профилей, определенная в (3.1), может использоваться фактически для любых числовых профильных данных. Однако для получения профиля оценок каждого стимула исследователю необходимо знать существенные признаки стимулов. Более того, исследователь должен обладать возможностью измерить каждый из существенных признаков, чтобы эти измерения включить в профиль. С другой стороны, чтобы использовать прямые оценки различий или вероятностные меры близости, исследователь не должен уметь определять важные признаки или мерить каждый из них. Поэтому в тех случаях, когда важные признаки стимулов плохо понятны или трудно получить независимые измерения по каждому из признаков, прямые оценки различий и вероятностные меры предпочтительнее мер различия профилей [Shepard, 1980].

ВЫВОДЫ

Для сбора данных в многомерном шкалировании может быть использован большой набор экспериментальных методов. Однако независимо от того, какой метод выбран, исследователь должен вначале построить выборку стимулов и набор признаков этих стимулов. Лучше всего иметь не менее пяти стимулов на каждую координатную ось, возникновение которой ожидается при анализе.

Наиболее часто применяемый экспериментальный метод состоит в том, что испытуемые дают прямые оценки различий всех пар стимулов. При сборе прямых оценок различий экспериментатор может использовать задания по категориальной оценке, графической оценке, категориальной сортировке или оценке величины. Экспериментаторы должны давать задания таким образом, чтобы минимизировать в оценках испытуемых пространственные и временные эффекты. С. Розенберг и его коллеги [Rosenberg et al., 1968] разработали задание по сортировке, которое может быть использовано для порождения данных о совместной встречаемости даже тогда, когда число стимулов велико.

¹ Можно создать центрированную по столбцам матрицу, преобразуя первоначальные величины таким образом, чтобы среднее значение каждого столбца было равно нулю. Аналогично можно построить матрицу данных с двойным центрированием, преобразуя первоначальные данные так, чтобы среднее значение каждой строки и каждого столбца было равно нулю. Нет необходимости отдельно рассматривать эти преобразования данных. Матрица различий профилей Δ , построенная на матрице центрированных по столбцам данных, будет равна матрице различий профилей, определенной по первоначальным величинам. Аналогично матрица различий профилей Δ , определенная на матрице данных с двойным центрированием, будет равна матрице различий профилей, определенной на матрице, центрированной по строкам.

как данные об условных вероятностях (частотах) несимметрические, исследователь должен изобрести способ построения симметрической матрицы близости из асимметричной матрицы условных вероятностей.

При построении матрицы различий пар стимулов могут применяться индексы различия профилей. Наиболее частая мера различия профилей — индекс расстояния из формулы (3.1). Однако до применения этих мер исследователь должен решить, будет ли он для подсчета различий профилей оперировать первоначальными величинами, величинами, стандартизованными по столбцам, величинами, центрированными по строкам, или величинами, стандартизованными по строкам. Это решение зависит только от содержательных соображений, которые в каждом приложении свои.

ЗАДАЧИ

1. Прочтите статью Р. Росса [Ross, 1934] об оптимальных упорядочениях сравниваемых пар. Затем определите оптимальное упорядочение для приведенных восьми стимулов. Сбалансируйте в парах пространственные эффекты.

а) Дж. Андерсон; б) Р. Рейган; в) Дж. Картер; г) У. Мондэйл; д) Дж. Буш; е) П. Льюс; ж) Т. О'Нил; з) Г. Бэйкер

2. Постройте полную матрицу различий профессий для данных из табл. 3.1 по первоначальным данным.

3. По данным из табл. 3.1 найдите:

- а) общее среднее,
- б) среднее каждой строки;
- в) среднее каждого столбца;
- г) стандартное (среднеквадратичное) отклонение каждой строки;
- д) стандартное отклонение каждого столбца.

4. Преобразуйте матрицу из табл. 3.1 к следующим видам:

- а) центрированная по строкам,
- б) стандартизованная по строкам;
- в) стандартизованная по столбцам.

5. Преобразуйте несимметрическую матрицу частот взаимодействия (табл. 3.2) в симметрическую

Таблица 3.2. Частоты, с которыми каждый стимул-строка проявляет инициативу к взаимодействию со стимулом-столбцом

	Билл	Мэри	Пит	Кэти
Билл	—	3	3	7
Мэри	4	—	3	8
Пит	4	4	—	7
Кэти	2	3	2	—

ОТВЕТЫ

1. а) Дж. Андерсон; Р. Рейган; б) Г. Бэйкер; У. Мондэйл; в) Т. О'Нил; Дж. Буш; г) П. Льюс; Дж. Андерсон; д) Дж. Картер; Р. Рейган; е) Дж. Буш; Г. Бэйкер; ж) П. Льюс; Т. О'Нил; з) Дж. Андерсон; Дж. Картер; и) Р. Рейган; У. Мондэйл; к) Г. Бэйкер; П. Льюс; л) Т. О'Нил; Дж. Андерсон; м) У. Мондэйл; Дж. Картер; н) Дж. Буш; Р. Рейган; о) Т. О'Нил; Г. Бэйкер;

п) Дж. Андерсон: У. Мондэйл; р) Дж. Картер. Дж. Буш; с) Р. Рейган: П. Льюс; т) Г. Бэйкер: Дж. Андерсон; у) Дж. Буш: У. Мондэйл; ф) П. Льюс: Дж. Картер; х) Т. О'Нил: Р. Рейган; ц) Дж. Андерсон: Дж. Буш; ч) У. Мондэйл: П. Льюс; ш) Дж. Картер: Т. О'Нил; щ) Р. Рейган: Г. Бэйкер; э) Дж. Буш: П. Льюс; ю) У. Мондэйл: Т. О'Нил; я) Дж. Картер: Г. Бэйкер.

2.

	Работа- ющие по найму	Горно- добываю- щая про- мышлен- ность	Перера- батываю- щая про- мышлен- ность	Строи- тельство	Финансы
Работающие по найму	—				
Горнодобывающая про- мышленность	5,62	—			
Перерабатывающая про- мышленность	1,11	5,50	—		
Строительство	12,59	13,20	12,31	—	
Финансы	5,48	7,94	5,87	18,03	—

3. а) $v_{..}=5,64$;

б) $v_1=5,06, v_2=4,80, v_3=5,16, v_4=10,54, v_5=2,66$;

в) $v_{.1}=7,50, v_{.2}=5,22, v_{.3}=5,20, v_{.4}=4,70, v_{.5}=5,60$,

г) $s_1=0,55, s_2=2,63, s_3=0,85, s_4=1,59, s_5=0,29$;

д) $s_1=3,79, s_2=2,63, s_3=2,48, s_4=2,20, s_5=2,78$.

4 а)

Работающие по найму	0,64	-0,76	-0,26	-0,26	0,64
Горнодобывающая промышленность	4,90	0,60	-1,70	-1,90	-1,90
Перерабатывающая промышленность	1,04	-1,16	0,44	-0,86	0,54
Строительство	2,96	-0,44	-0,84	-1,74	0,06
Финансы	-0,26	-0,36	0,14	0,04	0,44

б)

Работающие по найму	1,16	-1,38	-0,47	-0,47	1,16
Горнодобывающая промышленность	1,86	0,23	-0,65	-0,72	-0,72
Перерабатывающая промышленность	1,22	-1,36	0,52	-1,01	0,64
Строительство	1,86	-0,28	-0,53	-1,09	0,04
Финансы	-0,90	-1,24	0,48	0,14	1,52

в)

Работающие по найму	-0,48	-0,35	-0,16	0,05	0,04
Горнодобывающая промышленность	0,58	0,07	-0,85	-0,82	-0,97
Перерабатывающая промышленность	-0,34	-0,46	0,16	-0,18	0,04
Строительство	1,58	1,86	1,81	1,86	1,80
Финансы	-1,35	-1,11	-0,97	-0,91	-0,90

5.

	Мэри	Пит	Кэти
Билл	—		
Мэри	7	—	
Пит	7	7	—
Кэти	9	11	9

Основываясь на работах Т. Юнга и А. Хаусхолдера [Young and Householder, 1938, 1941], У. Торгерсон [Torgerson, 1952, 1958] предложил один из первых алгоритмов многомерного шкалирования. Дж. Гоуэр [Gower, 1966, 1982] обсудил и расширил результаты Торгерсона 1952 г. Предположения в [Torgerson, 1952] существенно более жесткие по сравнению с современными методами. Поэтому подход Торгерсона редко используется в первоначальном виде. Различные элементы его метода применялись в алгоритмах, описанных в гл. 5 и 6, в связи с этим метод Торгерсона будет рассмотрен подробно.

Следует сказать несколько слов о первом примере, приведенном в данной главе. В табл. 4.1 представлена гипотетическая матрица различий для шести спортивных игр. Эта матрица различий была построена таким образом, чтобы отразить две характеристики, по которым эти игры различаются: скорость спортивной игры и степень контакта между игроками. Хоккей и футбол — быстрые контактные игры. Теннис и баскетбол — быстрые неконтактные игры. Гольф и крокет — медленные неконтактные игры. Данные из табл. 4.1 будут использованы с целью показать, как можно применять метод Торгерсона для построения двумерной конфигурации стимулов, лежащей в основе матрицы данных. Это координатное применение многомерного шкалирования.

Таблица 4.1. Матрица различий Δ для шести спортивных игр и полученная из нее матрица скалярных произведений Δ^2 *

	Матрица различий Δ						
	Х	Ф	Б	Т	Г	К	δ_i^2
Хоккей (Х)	0,00	0,71	1,41	1,73	2,00	2,00	2,25
Футбол (Ф)	0,71	0,00	1,41	1,73	2,00	2,00	2,25
Баскетбол (Б)	1,41	1,41	0,00	1,00	1,41	1,41	1,50
Теннис (Т)	1,73	1,73	1,00	0,00	1,00	1,00	1,50
Гольф (Г)	2,00	2,00	1,41	1,00	0,00	0,71	1,92
Крокет (К)	2,00	2,00	1,41	1,00	0,71	0,00	1,92
σ^2_j	2,25	2,25	1,50	1,50	1,92	1,92	

$$S^2 = 1,89$$

	X	Ф	Б	Т	Г	К
Хоккей (X)	1,31	1,06	-0,07	-0,57	-0,86	-0,86
Футбол (Ф)	1,06	1,31	-0,07	-0,57	-0,86	-0,86
Баскетбол (Б)	-0,07	-0,07	0,56	0,06	-0,24	-0,24
Теннис (Т)	-0,57	-0,57	0,06	0,56	0,27	0,27
Гольф (Г)	-0,86	-0,86	-0,24	0,27	0,98	0,73
Крокет (К)	-0,86	-0,86	-0,24	0,27	0,73	0,98

МОДЕЛЬ ТОРГЕРСОНА

В модели Торгерсона предполагается, что оценки различий равны расстояниям в многомерном евклидовом пространстве. Пусть снова δ_{ij} — мера различия между объектами i и j . Под x_{ik} и x_{jk} ($i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; I = J; k = 1, \dots, K$) будем понимать координаты стимулов i и j по оси k . Отметим, что число строк I в матрице различий равно числу столбцов J , так как строки и столбцы соответствуют одним и тем же стимулам. Основное предположение Торгерсона следующее:

$$\delta_{ij} = d_{ij} = \left[\sum_k (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}. \quad (4.1)$$

Без потери общности можно предположить, что среднее значение координат стимулов по каждой оси равно нулю:

$$\sum_i x_{ik} = \sum_j x_{jk} = 0,0. \quad (4.2)$$

Торгерсон начал с построения матрицы Δ^* с двойным центрированием, элементы δ_{ij}^* которой посчитаны непосредственно по матрице данных. Матрица с двойным центрированием — это матрица, у которой среднее значение элементов каждой строки и каждого столбца равно 0,0. Каждый элемент новой матрицы Δ^* получается следующим образом:

$$\delta_{ij}^* = -\frac{1}{2} (\delta_{i.}^2 - \delta_i^2 - \delta_{.j}^2 + \delta^2). \quad (4.3)$$

Здесь $\delta_{i.}^2$, $\delta_{.j}^2$ и δ^2 определены так:

$$\delta_{i.}^2 = \frac{1}{J} \sum_j \delta_{ij}^2, \quad (4.4)$$

$$\delta_{.j}^2 = \frac{1}{I} \sum_i \delta_{ij}^2,$$

$$\delta^2 = \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j \delta_{ij}^2.$$

В табл. 4.1 приведена и матрица Δ^* , вычисленная по матрице Δ . Элемент в строке 2 столбца 3 матрицы Δ^* , $\delta_{23}^* = -0,07$, получен путем возведения в квадрат $\delta_{23}^2 = (1,41)^2 = 2,00$, вычитания среднего значения квадратов элементов строки 2, $\delta_{2.}^2 = 2,25$, вычитания среднего значения квадратов элементов столбца 3, $\delta_{.3}^2 = 1,50$, прибавления общего среднего значения квадратов элементов матрицы, $\delta^2 = 1,89$, и умножения результата на $-0,50$:

$$\begin{aligned}\delta_{23}^* &= -\frac{1}{2}(\delta_{23}^2 - \delta_{2.}^2 - \delta_{.3}^2 + \delta^2) = \\ &= -\frac{1}{2}(2,00 - 2,25 - 1,50 + 1,89) = -0,07.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Элемент в строке 4, столбец 5, матрицы Δ^* был найден так:

$$\begin{aligned}\delta_{45}^* &= -\frac{1}{2}(\delta_{45}^2 - \delta_{4.}^2 - \delta_{.5}^2 + \delta^2) = \\ &= -\frac{1}{2}(1,00 - 1,50 - 1,92 + 1,89) = 0,27\end{aligned}\quad (4.6)$$

и т. д.

Торгерсон показал, что если данные удовлетворяют (4.1), то каждый элемент новой матрицы Δ^* будет иметь вид:

$$\delta_{ij}^* = \sum_k x_{ik} x_{jk}.\quad (4.7)$$

Для читателя, который этим заинтересуется, далее приведено доказательство. Формула (4.7) — это основная теорема, на которой построен алгоритм Торгерсона. Матрица Δ^* часто называется *матрицей скалярных произведений*. Из формулы (4.7) видно, что каждый из ее элементов — сумма произведений скаляров x_{ik} и x_{jk} .

Уравнение (4.7) можно записать в матричном виде:

$$\Delta^* = XX',\quad (4.8)$$

где X — $(I \times K)$ -матрица координат стимулов.

Как описано в гл. 2, найти матрицу X , удовлетворяющую (4.8), можно (если она существует) с помощью программы факторного анализа методом главных компонент. Описание методов подсчета X и условий, при которых такая матрица существует, читатель может найти в учебниках матричной алгебры [Green, 1978; Hohn, 1973]*.

* См. примечания в гл. 2, с. 34. — Примеч. пер.

На рис. 4.1 показана матрица X , полученная путем извлечения первых двух главных компонент из приведенной в табл. 4.1 матрицы скалярных произведений Δ^* .

ПОВОРОТ

Матрица X , построенная с помощью метода главных компонент, является одним из решений уравнения (4.8). Чтобы понять, почему это решение не единственно, представьте себе матрицу ортогонального преобразования T размером $(K \times K)$. Если X удовлетворяет (4.8), то любая матрица $X^* = XT$ тоже удовлетворяет (4.8), т. е. если

$$\Delta^* = XX', \quad (4.9)$$

то

$$\Delta^* = X^* X^{*'} \quad (4.10)$$

Так как T — ортогональная матрица, $TT' = I$ (см. определение ортогональной матрицы в гл. 2). Отсюда

$$X^* X^{*'} = (XT)(XT)' \quad (4.11)$$

По теореме 2 из гл. 2 $(XT)'$ в (4.1) равно $T'X'$. Подставляя этот результат в (4.11), получим

$$\begin{aligned} X^* X^{*'} &= (XT)(T'X') = \\ &= X(TT')X' = \\ &= XIX' = \\ &= XX' = \\ &= \Delta^*. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Как показывает доказательство в (4.12), если X — решение (4.8), то и X^* — тоже решение (4.8). Если есть различные повороты X , которые могут воспроизвести Δ^* одинаково хорошо, то какой поворот следует предпочесть?

Если размерность K не превышает двух, то в приложениях типа «сжатие данных» и «верификация конфигурации» этот вопрос является спорным. При таком небольшом числе координатных осей важные особенности конфигурации будут видны просто при ее рассмотрении, независимо от поворота. Однако в координатных приложениях этот вопрос бесспорный. Если координатные оси не повернуты соответствующим образом, то координаты не будут совпадать с существенными характеристиками стимулов, и интерпретировать координатные оси будет трудно. Фраза «существенные характеристики стимулов» объяснена ниже.

Конфигурация на рис. 4.1 иллюстрирует одну из возможных интерпретационных проблем. На одном конце координатной оси I — медленные неконтактные игры, на другом — быстрые контактные игры, а посередине — быстрые неконтактные игры. Шкала, представляемая этой координатной осью, не может интерпретироваться как скорость каждой игры или степень контакта. Это смесь того и другого. Координатная ось II также является смесью двух характеристик стимулов — скорости и контакта. На ее положительном конце — быстрые неконтактные игры, а на другом — медленные неконтактные и быстрые контактные.

Решить вопрос о повороте конфигурации можно тремя способами. Если непереворотная конфигурация интерпретируема, то поворачивать ее вообще не нужно. На рис. 4.1 ситуация не такая. Следова-

тельно, для получения интерпретируемого представления конфигурации должен быть применен объективный поворот или ручной поворот. К их рассмотрению мы и перейдем.

Объективные повороты

Под объективным поворотом понимается математический алгоритм для нахождения интерпретируемого поворота конфигурации. Так как объективные вращения предназначены преимущественно для использования в факторном анализе и только иногда применяются в многомерном шкалировании, они будут здесь лишь упомянуты. Читатели, желающие глубже познакомиться с такими поворотами, могут обратиться к работе по факторному анализу [Nagman, 1976]*. Наиболее доступные объективные повороты предназначены для поворота полученной в результате факторного анализа конфигурации тестов так, чтобы повернутая конфигурация удовлетворяла, насколько это возможно, критерию простой структуры [Thurstone, 1947; Tucker, 1967]. Упрощенно говоря, решение задачи многомерного шкалирования удов-

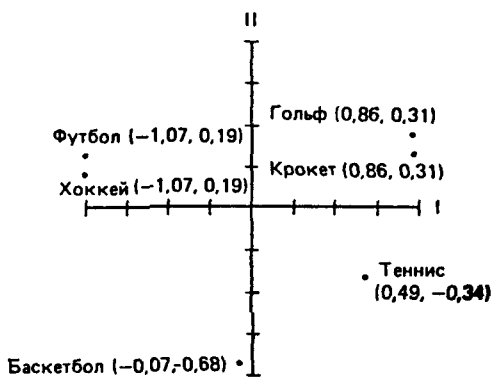


Рис. 4.1. Непереворотная метрическая шкала данных о спортивных играх

* См. также [Браверман и Мучник, 1983; Жуковская и Мучник, 1976; Иберла, 1980; Йереског и др., 1980; Окунь, 1974; Лоули и Максвелл, 1967].—
Примеч. пер.

летворяет критерию простой структуры, если каждый из стимулов имеет ненулевое шкальное значение по одной характеристике стимулов или, в крайнем случае, по небольшому числу этих характеристик. Подобные повороты редко используются в многомерном шкалировании, так как, насколько известно автору, нет никаких причин верить, что встречающиеся на практике стимулы удовлетворяют этому критерию. Нет никаких оснований и верить в то, что поворот по такому критерию

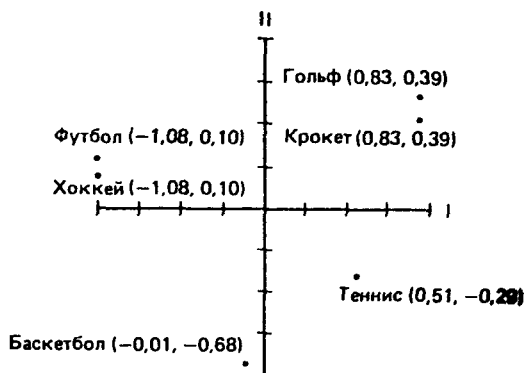


Рис. 4.2 Поворот методом «варимакс» координат метрической шкалы данных о спортивных играх

приведет к более интерпретируемому решению. В некоторых приложениях хорошо интерпретируемое решение может дать объективный поворот к такой простой структуре, как варимакс* [Kaiser, 1958] или эквимакс [Saunders, 1960]. Исследователь не должен, однако, предполагать, что объективный алгоритм вращения автоматически приводит к наиболее интерпретируемому из возможных решений.

На рис. 4.2 приведен поворот «варимакс» первоначальной матрицы решения (см. рис. 4.1). Поворот «варимакс» мало отличается от повернутого решения, поэтому проблемы интерпретации здесь те же. В этом примере координатные оси решения «варимакс» интерпретировать не легче, чем повернутые оси на рис. 4.1.

Ручные повороты

Объективные повороты выполняются на ЭВМ. Ручные повороты выполняются людьми. Ручные повороты — это повороты, выполненные исследователем и выбранные на основе зрительного осмотра повернутой конфигурации. На практике иногда можно, посмотрев на конфигурацию, увидеть, какой поворот решения дадут интерпретируемые координатные оси. Если ось I на рис. 4.1 повернуть на 45° , как это показано на рис. 4.3, то все быстрые спортивные игры окажутся на ее положительном конце, а все медленные — на отрицательном. Можно сказать, что шкальные значения по полученной таким образом

* См. также [Браверман и Мучник, 1983; Иберла, 1980; Йереског и др., 1980; Харман, 1972]. — *Примеч. пер.*

координатной оси будут отражать скорость спортивных игр. Поворот на 45° оси II, как показано на рис. 4.3, приведет к оси, на одном конце которой будут контактные игры, а на другом — неконтактные. Полученная координатная ось будет отражать степень контакта в каждой игре.

Можно быстро найти углы между координатными осями I и II на рис. 4.1 и координатными осями 1 и 2 на рис. 4.3. Угол между осями I и 1 — 45° , между осями II и 1 — 315° , между осями I и 2 — 135° , между осями II и 2 — 45° . Соответствующие косинусы равны 0,71, 0,71, -0,71 и 0,71. Объединение этих косинусов дает матрицу ортогонального преобразования:

$$T = III \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0,71 & -0,71 \\ 0,71 & 0,71 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Умножая справа непервернутую матрицу шкальных значений X, изображенную на рис. 4.1, на матрицу T, получим повернутую матрицу координат, изображенную на рис. 4.3. Полученные координатные оси

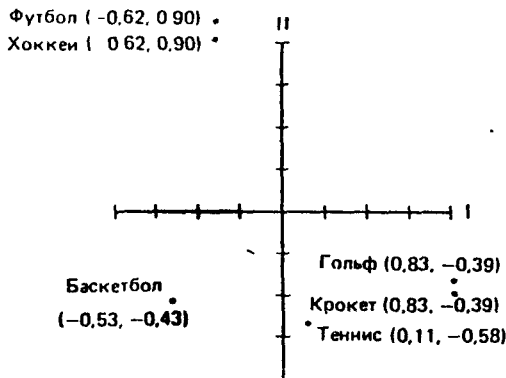


Рис. 4.3. Ручной поворот метрической шкалы данных о спортивных играх

$$X^* = \begin{bmatrix} -0,62 & 0,90 \\ -0,62 & 0,90 \\ -0,53 & -0,43 \\ 0,11 & -0,58 \\ 0,83 & -0,39 \\ 0,83 & -0,39 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Хоккей} \\ \text{Футбол} \\ \text{Баскетбол} \\ \text{Теннис} \\ \text{Гольф} \\ \text{Крокет} \end{matrix} \quad (4.14)$$

могут быть проинтерпретированы как степень контакта в спортивных играх и скорость их.

В координатных приложениях поиск интерпретируемого поворота — важный шаг в процессе многомерного шкалирования. Возможны различные подходы. Если первоначальное решение интерпретируемо, то

исследователю вообще не нужен поворот*. Если неповернутое решение плохо интерпретируется, то можно попробовать такой объективный поворот, как варимакс [Kaiser, 1958] или эквимакс [Saunders, 1960]. Если ни неповернутое решение, ни объективно повернутое не приводят к интерпретируемым координатам, то исследователь может попытаться использовать ручной поворот.

РАЗМЕРНОСТЬ

До этого момента обсуждение метода Торгерсона проходило так, как если бы число координатных осей K было известно. Однако на практике оно не известно и должно быть оценено при анализе. Применяя большинство методов многомерного шкалирования, пользователь должен получить решения в различных размерностях и выбрать одно из них, руководствуясь тремя критериями: интерпретируемостью, соответствием конфигурации данным и воспроизводимостью. Алгоритм Торгерсона минимизирует следующую меру соответствия:

$$F = \sum_{(i, j)} (\delta_{ij}^* - \sum_k \widehat{x}_{ik} \widehat{x}_{jk})^2,$$

где \widehat{x}_{ik} и \widehat{x}_{jk} — оценки координат стимулов i и j по оси k , т. е. сумму квадратов разностей между предсказанными скалярными произведениями, $\widehat{\delta}_{ij}^* = \sum_k \widehat{x}_{ik} \widehat{x}_{jk}$, и реальными скалярными произведениями δ_{ij}^* .

Метод Торгерсона — один из двух рассмотренных в этой книге методов, для которых мера соответствия не играет почти никакой роли в решении вопроса о том, сколько координатных осей требуется для адекватного воспроизведения данных. Однако существует набор собственных значений (называемых также характеристическими корнями), которые действительно играют роль в решении вопроса о размерности. Каждое собственное значение связано с одной координатной осью решения. Для наших целей собственное значение, связанное с данной

* Именно таким оказался результат обработки данных о различии спортивных игр из табл. 4.1 методом неметрического многомерного шкалирования Джонсона [Johnson, 1973], реализованным в приложенной к книге программе PARSUN (см. также гл. 5 и примечания к ней). Неповернутые координатные оси следующие:

I	II	
-0,04	-0,67	Хоккей
-0,53	-0,24	Футбол
0,70	0,01	Баскетбол
0,33	0,74	Теннис
1,01	0,94	Гольф
0,64	1,32	Крокет

Для этой конфигурации $\bar{\theta} = 0$. Здесь ось I — степень контакта, а ось II — скорость. — Примеч. пер.

Координатной осью, — просто сумма квадратов шкальных значений стимулов по этой оси, т. е. если \widehat{x}_{ik} — оцененное шкальное значение стимула i по оси k , то k -е собственное значение равно:

$$\lambda_k = \sum_i \widehat{x}_{ik}^2. \quad (4.15)$$

Если стимул 1 — хоккей, 2 — футбол, 3 — баскетбол, 4 — теннис, 5 — гольф, 6 — крокет, то для решения на рис. 4.1 второе собственное значение равно:

$$\lambda_2 = \sum \widehat{x}_{i2}^2 = \widehat{x}_{12}^2 + \widehat{x}_{22}^2 + \widehat{x}_{32}^2 + \widehat{x}_{42}^2 + \widehat{x}_{52}^2 + \widehat{x}_{62}^2 = (0,19)^2 + (0,19)^2 + (-0,68)^2 + (-0,34)^2 + (0,31)^2 + (0,31)^2 = 0,84. \quad (4.16)$$

Полезным для определения размерности может быть чертеж, аналогичный рис. 4.4. Вертикальная ось представляет собственные значения для неповернутого решения, а горизонтальная ось соответствует номерам координатных осей. График построен посредством отложения вверх от точки, соответствующей номеру оси, собственного значения, связанного с этой осью. Например, точка, соответствующая второй координатной оси, показывает, что собственное значение для второй оси неповернутого решения равно 0,84.

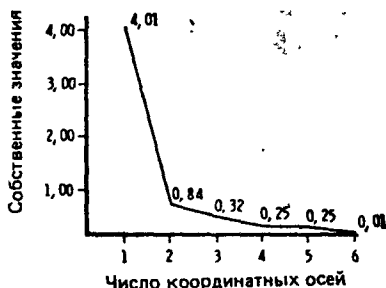


Рис. 4.4. Зависимость собственных значений от размерности для неповернутой метрической шкалы данных о спортивных играх

Если данные точно соответствуют модели уравнения (4.1), то график должен сгладиться на $(K + 1)$ координатах так, как график на рис. 4.4 сглаживается на третьей координате. Иными словами, на графике должен быть изгиб на координате, превышающей верное значение размерности, K , на единицу. В реальных данных, для которых нет точного соответствия модели или велики ошибки измерения и выборки, изгиб трудно различить. Действительно, изгиб на рис. 4.4 различить трудно. В подобных случаях для верного определения размерности графика собственных значений может быть недостаточно. Надо рассматривать и интерпретируемость, и воспроизводимость.

Воспроизводимость может служить критерием только в том случае, если есть не менее двух подвыборок. Основная идея в том, что следует сохранить в окончательном решении столько координатных осей, сколько из них окажутся согласованными в различных подвыборках. Если построить для каждой подвыборки свое решение и во всех подвыборках окажутся K согласованных координат, то оконча-

тельное решение должно содержать именно K координатных осей. Все подвыборки должны быть взяты из одной совокупности.

Интерпретируемость как критерий требует от исследователя некоторых субъективных оценок. Однако при этом решение в более высокой размерности предпочитается решению в более низкой размерности, если существуют важные характеристики стимулов, проявляющиеся в решении более высокой размерности, но не проявляющиеся в решении более низкой размерности. И наоборот, решение в более низкой размерности предпочитается, если нет таких существенных характеристик стимулов, которые не проявляются в решении низкой размерности.

В нашем примере в одномерном решении, состоящем из изображенной на рис. 4.1 первой координатной оси, нельзя различить ни одну из характеристик стимулов — ни степень контактности, ни скорость. Обе характеристики смешаны в единственной координатной оси одномерного решения. Только решение, содержащее две координатные оси, может быть повернуто таким образом, что каждая характеристика стимулов будет соответствовать своей оси на рис. 4.3. Поскольку двумерное решение интерпретируется легче, здесь предпочтительнее двумерное решение.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Интерпретируемость обсуждалась выше, когда речь шла о выборе размерности. Однако нужно сделать еще несколько замечаний об интерпретации решений. В частности, следует объяснить фразу «существенные характеристики стимулов», употреблявшуюся ранее. Такие характеристики — это обычно упорядочения или группировки стимулов.

Существенно важная группа стимулов — это набор стимулов, группирующихся вместе, в одной области многомерного пространства решения, и обладающих каким-либо общим признаком. Например, в исследовании профессий торговые профессии могут располагаться вместе, образуя разумную группировку. При исследовании популярных журналов могут группироваться вместе журналы для женщин (*МС*, *Домашний журнал для леди*, *Вог* и др.).

Существенное упорядочение стимулов — это упорядочение, соответствующее порядку стимулов по их важной характеристике. Например, упорядочение стимулов по координатной оси I на рис. 4.3 соответствует их упорядочению по степени контакта в игре. Упорядочение по оси II соответствует упорядочению игр по скорости. Обе эти координатные оси представляют существенные упорядочения, так как они соответствуют важным характеристикам стимулов — скорости и степени контакта в игре. В идеале координатные оси должны быть повернуты таким образом, чтобы каждая из них представляла одно из существенных упорядочений.

Интерпретация решения включает идентификацию важных группировок и упорядочений стимулов. Для группировок нужно идентифицировать те черты, которые являются общими для всех объектов каждого кластера. Для упорядочений нужно идентифицировать соответствующие им признаки. Один из способов интерпретации решения — простое рассмотрение конфигурации. Более формальные способы обсуждаются в гл. 8.

ПРИМЕР

Р. Смит и А. Зигель [Smith and Siegel, 1967] использовали многомерное шкалирование при определении координатных осей для обязанностей руководителей гражданской обороны (ГО). В три последовательных этапа они идентифицировали 34 обязанности, которые, по их мнению, представляют все обязанности руководителей ГО. Тридцать пять руководящих работников ГО оценивали различие каждой пары обязанностей по шкале из 11 пунктов. Затем для получения матрицы различий оценки различий 35 испытуемых были объединены.

Для получения четырехмерного решения применялся алгоритм Торгерсона. Смит и Зигель использовали объективный поворот эквимакс [Sanders, 1960]. Для каждой из четырех координатных осей в табл. 4.2 приведены обязанности, имеющие самые высокие положительные значения и самые низкие отрицательные значения. Авторы резюмируют их интерпретацию координатных осей в присвоенных названиях: внутреннее поддержание системы — внешняя эксплуатация системы (ось I), регулярное планирование — планирование на чрезвычайный случай (ось II), использование ресурсов — оценка ресурсов (ось III), интеграция системы чрезвычайных обстоятельств (ось IV)

Таблица 4.2. Координатные оси для обязанностей руководителей гражданской обороны (ГО)

Значение на шкале	Обязанность
	<i>Координатная ось I: внутреннее поддержание системы — внешняя эксплуатация системы</i>
3,43	Издание необходимых приказов и инструкций для населения на случай чрезвычайного положения
4,21	Установление каналов информации
4,70	Передача информации из организаций ГО более высокого уровня
5,66	Информирование общественности о деятельности ГО
-3,19	Помощь в юридических вопросах, возникающих в деятельности ГО
-3,96	Расчеты для фондов и собственности ГО
-4,94	Гарантирование сохранения важных записей ГО

Значение на шкале	Обязанность
<i>Координатная ось II: регулярное планирование — планирование на чрезвычайный случай</i>	
3,58	Управление защитой средств обслуживания
4,46	Формирование и представление бюджета ГО
4,82	Инспектирование приписанного оборудования, и доклад о нем
6,39	Расчеты для фондов и собственности ГО
—2,16	Установление мобилизационных процедур
—2,24	Потенциальная оценка чрезвычайных обстоятельств
—3,00	Планирование мер на случай гибели правительства
—4,88	Установление порядка преемственности внутри системы ГО
<i>Координатная ось III: использование ресурсов — оценка ресурсов</i>	
2,81	Расчеты для фондов и собственности ГО
4,27	Консультации по необходимому законодательству ГО
6,33	Помощь в юридических вопросах, возникающих в деятельности ГО
—3,20	Проведение необходимых исследований
—3,68	Определение доступности людских и материальных ресурсов
—3,94	Гарантирование опыта работников ГО
—4,65	Проведение и оценка тестов ГО
<i>Координатная ось IV: интеграция системы чрезвычайных обстоятельств</i>	
3,79	Консультации по необходимому законодательству ГО
4,14	Формирование и представление бюджета ГО
4,26	Назначение комитетов технических советников ГО
4,91	Проведение необходимых исследований
—2,11	Установление каналов информации
—2,49	Передача информации из организаций ГО более высокого уровня
—3,26	Поддержание связи с федеральными военными группами и военными группами штатов
—3,35	Издание необходимых приказов и инструкций для населения на случай чрезвычайного положения
—4,90	Объявление чрезвычайного положения и мобилизация системы ГО
Источник	[Smith and Siegel, 1967]. Адаптировано с разрешения автора и издателя.

Смит и Зигель предлагают использовать полученные координатные оси как основу для разработки одномерных шкал оценок работников ГО. Например, может возникнуть желание создать шкалу оценок ра-

ботников ГО, соответствующую оси III, на которой задачи оценки ресурсов появляются на одном полюсе. Авторы предлагают даже планировать с помощью полученных осей отбор и обучение работников ГО.

* ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ТОРГЕРСОНА¹

Метод Торгерсона основан на доказательстве того, что если взять матрицу данных Δ с элементами

$$\delta_{ij} = d_{ij} = \left[\sum_k (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2} \quad (4.17)$$

и предпринять преобразование этих элементов:

$$\delta_{ij}^* = -\frac{1}{2} (\delta_{ij}^2 - \delta_i^2 - \delta_j^2 + \delta^2), \quad (4.18)$$

то будет верно следующее:

$$\delta_{ij}^* = \sum_k x_{ik} x_{jk}. \quad (4.19)$$

Хотя Торгерсон этого и не делал, но без потери общности можно предположить, что

$$\sum_i x_{ik} = \sum_j x_{jk} = 0 \text{ для всех } k. \quad (4.20)$$

В качестве первых шагов доказательства необходимо вывести формулы, определяющие величины δ_{ij}^2 , δ_i^2 и δ^2 , через координаты стимулов x_{ik} и x_{jk} . Начнем с выведения формулы, определяющей через координаты стимулов величины δ_{ij}^2 .

Возведя (4.17) в квадрат и раскрывая скобки в правой части, получим

$$\delta_{ij}^2 = \sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 - 2 \sum_k x_{ik} x_{jk}. \quad (4.21)$$

Возведя в квадрат и усредняя по j левые части уравнения (4.17), получим

$$\delta_i^2 = \frac{1}{J} \sum_j \delta_{ij}^2. \quad (4.22)$$

Подставив правые части (4.21) в правую часть (4.22), получим

$$\begin{aligned} \delta_i^2 &= \frac{1}{J} \sum_j \left(\sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 - 2 \sum_k x_{ik} x_{jk} \right) = \\ &= \frac{1}{J} \sum_j \sum_k x_{ik}^2 + \frac{1}{J} \sum_j \sum_k x_{jk}^2 - 2 \frac{1}{J} \sum_j \sum_k x_{ik} x_{jk}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

¹ Звездочкой обозначаются параграфы, содержащие доказательство теорем или описание алгоритмов. Читатель может пропустить этот материал без потери последовательности изложения.

Рассмотрим третье слагаемое в правой части выражения (4.23), $-2 \times (1/J) \sum_j \sum_h x_{ih} x_{jh}$. Так как x_{ih} не зависит от j , это слагаемое может быть переписано как $-2 (1/J) \sum_h x_{ih} (\sum_j x_{jh})$. Согласно (4.20) $\sum_j x_{jh} = 0$ и поэтому $-2 (1/J) \sum_h x_{ih} (\sum_j x_{jh}) = 0$. Следовательно, (4.23) можно переписать в виде

$$\delta_i^2 = \sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2, \quad (4.24)$$

где $x_{ih} = (1/J) \sum_j x_{ijk}$. Выражение (4.24) означает, что величина δ_i^2 может быть представлена в виде суммы квадратов координат стимула i плюс сумма квадратов средних значений координат. Обе эти суммы взяты по всем K координатным осям. Формула (4.24) и есть нужное нам выражение δ_i^2 через координаты стимулов. Перейдем теперь к выводу аналогичного выражения для δ_j^2 .

Возводя (4.17) в квадрат и усредняя левые части по i , получим

$$\delta_j^2 = \frac{1}{I} \sum_i \delta_{ij}^2. \quad (4.25)$$

Подставляя правую часть (4.21) в правую часть (4.25), получим

$$\begin{aligned} \delta_j^2 &= \frac{1}{I} \sum_i \left(\sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 - 2 \sum_k x_{ih} x_{jh} \right) = \\ &= \frac{1}{I} \sum_i \sum_k x_{ik}^2 + \frac{1}{I} \sum_i \sum_k x_{jk}^2 - \\ &- 2 \frac{1}{I} \sum_i \sum_k x_{ih} x_{jh}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое в правой части (4.26). Так как x_{jh} не зависит от i , это слагаемое может быть переписано как $-2 (1/I) \sum_h x_{jh} (\sum_i x_{ih})$. Согласно (4.20) $\sum_i x_{ih} = 0$, и отсюда $-2 (1/I) \sum_h x_{jh} (\sum_i x_{ih}) = 0$. Следовательно, (4.26) можно записать в виде

$$\delta_j^2 = \sum_k x_{jk}^2 + \sum_k x_{ik}^2, \quad (4.27)$$

где

$$x_{jk}^2 = \frac{1}{I} \sum_i x_{ijk}^2 = \frac{1}{I} \sum_i x_{ik}^2.$$

Формула (4.27) дает для δ_j^2 выражение, аналогичное выражению для δ_i^2 в (4.24), и является нужным нам выражением δ_j^2 через координаты стимулов. Чтобы начать доказательство основной теоремы Торгерсона (4.19), нам нужно только выразить через координаты стимулов величину δ^2 .

Возводя (4.17) в квадрат и усредняя левые части по j и i , получим

$$\delta^2 = \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j \delta_{ij}^2 \quad (4.28)$$

Подставляя правую часть (4.21) в правую часть (4.28), получим

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j \left(\sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 - 2 \sum_k x_{ik} x_{jk} \right) = \\ &= \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j \sum_k x_{ik}^2 + \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j \sum_k x_{jk}^2 - \\ &- 2 \frac{1}{IJ} \sum_i \sum_j \sum_k x_{ik} x_{jk}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Рассмотрим третье слагаемое в правой части (4.29). Согласно (4.20) $\sum_i x_{ik} = \sum_j x_{jk} = 0$, и поэтому $-2 (1/IJ) \sum_i \sum_j \sum_k x_{ik} x_{jk} = -2 \times \times (1/IJ) \sum_k (\sum_i x_{ik}) (\sum_j x_{jk}) = 0$. Следовательно, (4.29) можно переписать в виде

$$\delta^2 = \sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 = 2 \sum_k x_{ik}^2. \quad (4.30)$$

Для доказательства теоремы Торгерсона (4.19) следует лишь объединить результаты (4.24), (4.27) и (4.30) с выражениями (4.18) и (4.21).

Заменим слагаемые δ_{ij}^2 , $\delta_{i\cdot}^2$, $\delta_{\cdot j}^2$ и δ^2 в правой части (4.18) на соответствующие им выражения в правых частях (4.21), (4.24), (4.27) и (4.30). Получим

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^* &= -\frac{1}{2} \left[\left(\sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 - 2 \sum_k x_{ik} x_{jk} \right) - \right. \\ &- \left(\sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 \right) - \\ &- \left. \left(\sum_k x_{ik}^2 + \sum_k x_{jk}^2 \right) + 2 \sum_k x_{ik}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Приводя подобные члены в (4.31) и умножая на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, получим желаемый результат:

$$\delta_{ij}^* = \sum_k x_{ik} x_{jk}. \quad (4.32)$$

Таким образом, мы пришли к основной теореме Торгерсона, записанной первый раз в (4.7)

ДРУГИЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Алгоритм Торгерсона [Torgerson, 1952, 1958] основан на очень жестком-предположении. Несколько менее жестка следующая модель:

$$\delta_{ij} = d_{ij} + c, \quad (4.33)$$

где c — аддитивная константа. Один из методов анализа данных о близости — сначала оценить c , вычесть оценку c из каждой величины δ_{ij} , а затем анализировать новые данные $(\delta_{ij} - \hat{c})$, применяя алгоритм Торгерсона. В многомерном шкалировании проблема первоначальной оценки c часто называется *проблемой аддитивной константы* [Cooper, 1972].

Можно дать следующую оценку c :

$$\hat{c} = (-1) \max_{(h, i, j)} (\delta_{hj} - \delta_{hi} - \delta_{ij}). \quad (4.34)$$

Если создать новые меры близости γ_{ij} таким образом, что

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= 0, \text{ если } i = j, \\ \gamma_{ij} &= \delta_{ij} - \hat{c}, \text{ если } i \neq j, \end{aligned} \quad (4.35)$$

то меры близости γ_{ij} будут удовлетворять неравенству треугольника (1.4). Оценка аддитивной константы, \hat{c} , — самая маленькая величина, которую можно прибавить к каждой величине δ_{ij} ($i \neq j$) для гарантии, что преобразованные данные удовлетворяют неравенству треугольника [Cargoll and Wish, 1974a].

Дж. Рамсей [Ramsay, 1978, 1980] вывел для координат стимулов оценки максимального правдоподобия. Он предложил две модели. В первой делается предположение, что каждая мера близости δ_{ij} — нормально распределенная случайная величина с неизвестным средним $\mu_{ij} = d_{ij}$ и дисперсией σ^2 . Во второй предполагается, что натуральные логарифмы данных $\ln(\delta_{ij})$ — нормально распределенные случайные величины с неизвестными средними $\mu_{ij} = d_{ij}$ и дисперсией σ^2 . Теория максимального правдоподобия, лежащая в основе этих алгоритмов, делает возможным разработать меру соответствия, которая при представляемой шкальной моделью нулевой гипотезе распределена приближенно к распределению хи-квадрат. Ранние версии алгоритма Рамсея требовали столько машинного времени, что могли использоваться только для небольших массивов данных. Если преодолеть вычислительные трудности, то подход, основанный на методе максимального правдоподобия, позволит исследователю проверить соответствие своих данных модели более строго, чем это возможно при других моделях.

ВЫВОДЫ

Торгерсон [Torgerson, 1952] предположил, что различия равны расстояниям в евклидовом пространстве. Из этого предположения он вывел один из первых алгоритмов многомерного шкалирования. Используя данные, удовлетворяющие метрическому предположению Торгерсона, можно найти координатные оси, применив к матрице скалярных произведений Δ^* метод главных компонент.

Вопрос о числе координатных осей исследуется путем рассмотрения воспроизводимости осей в нескольких подвыборках, интерпретируемости решения в различных размерностях и анализа графика зависимости собственных значений от номеров осей. Решение (конфигурация) может остаться неповернутым, может быть повернуто вручную или с помощью какого-либо объективного алгоритма, такого, как варимакс [Kaiser, 1958] или эквимакс [Saunders, 1960]. Из этих трех способов поворота предпочтительнее тот, который дает наиболее интерпретируемые направления. Интерпретация решения включает идентификацию группировок стимулов или упорядочений стимулов, соответствующих их существенным характеристикам.

Смит и Зигель [Smith and Siegel, 1967] использовали алгоритм Торгерсона для построения координатных осей обязанностей. Они пришли к выводу, что полученные координатные оси могут служить основой для создания одномерных шкал оценок работников ГО и программ их обучения.

ЗАДАЧИ

1. Представьте себе, что приведенная матрица Δ содержит данные о различии всех возможных пар восьми стран. Вычислите по этой матрице различий матрицу скалярных произведений Δ^* .

	Ангола	Аргентина	Австралия	Китай	Куба	Япония	США	Зимбабве
Ангола	0,00	1,41	1,00	1,00	1,41	1,41	1,73	0,71
Аргентина	1,41	0,00	1,00	1,73	1,41	1,41	1,00	1,41
Австралия	1,00	1,00	0,00	1,41	1,73	1,00	1,41	1,00
Китай	1,00	1,73	1,41	0,00	1,00	1,00	1,41	1,00
Куба	1,41	1,41	1,73	1,00	0,00	1,41	1,00	1,41
Япония	1,41	1,41	1,00	1,00	1,41	0,00	1,00	1,41
США	1,73	1,00	1,41	1,41	1,00	1,00	0,00	1,73
Зимбабве	0,71	1,41	1,00	1,00	1,41	1,41	1,73	0,00

2. Примените метод главных компонент для извлечения трех компонент из вычисленной в задаче 1 матрицы скалярных произведений. Напечатайте восемь собственных значений, а также неповернутую конфигурацию и конфигурацию, повернутую методом варимакс (все в размерности 3) Затем найдите:

а) шкальные значения по первым трем неповернутым координатам. Можете ли вы проинтерпретировать эти оси?

б) шкальные значения по первым трем координатам, повернутым методом варимакс. Можете ли вы проинтерпретировать эти оси?

- в) Каковы восемь собственных значений?
- 3 Постройте график зависимости собственных значений от размерности
4. Примените приведенное внизу преобразование к координатам, повернутым методом варимакс. Каковы полученные шкальные значения? Проинтерпретируйте все оси

$$T = \begin{bmatrix} 0,63 & 0,53 & -0,63 \\ 0,55 & -0,63 & 0,59 \\ -0,59 & -0,63 & -0,55 \end{bmatrix}$$

ОТВЕТЫ

1.

	Ангола	Аргентина	Австралия	Китай	Куба	Япония	США	Зимбабве
Ангола	0,70	-0,21	0,17	0,17	-0,21	-0,34	-0,71	0,45
Аргентина	-0,21	0,89	0,26	-0,74	-0,12	-0,24	0,39	-0,21
Австралия	0,17	0,26	0,64	-0,37	-0,74	0,14	-0,24	0,17
Китай	0,17	-0,74	-0,37	0,64	0,26	0,14	-0,24	0,17
Куба	-0,21	-0,12	-0,74	-0,26	0,89	-0,24	0,39	-0,21
Япония	-0,34	-0,24	0,14	0,14	-0,24	0,64	0,26	-0,34
США	-0,71	0,39	-0,24	-0,24	0,39	0,26	0,89	-0,71
Зимбабве	0,45	-0,21	0,17	0,17	-0,21	-0,34	-0,71	0,70

2. а)

	I	II	III
Ангола	-0,73	0,00	-0,21
Аргентина	0,42	0,71	-0,45
Австралия	-0,28	0,71	0,26
Китай	-0,28	-0,71	0,26
Куба	0,42	-0,71	-0,45
Япония	0,24	0,00	0,77
США	0,95	0,00	0,04
Зимбабве	-0,73	0,00	-0,21

Эти оси интерпретировать трудно, если не невозможно

б)

	I	II	III
Ангола	-0,75	-0,10	0,10
Аргентина	0,18	-0,92	0,08
Австралия	-0,14	-0,25	0,75
Китай	-0,14	0,75	-0,25
Куба	0,18	0,08	-0,92
Япония	0,56	0,41	0,41
США	0,87	-0,27	-0,27
Зимбабве	-0,75	0,10	0,10

И эти оси интерпретировать трудно, если не невозможно.

а) Координата Собственное значение	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	2,55	2,01	1,22	0,25	0,02	0,01	-0,00	-0,07

3. Из рис. 4.5 видно, что $K = 3$, так как изгиб находится у координаты IV.

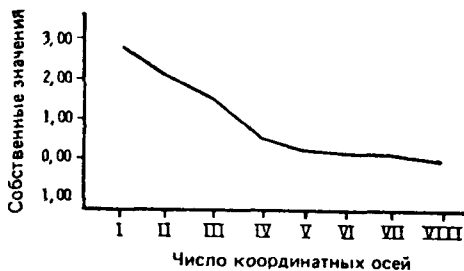


Рис. 4.5 Зависимость собственных значений от размерности для метрической шкалы данных о восьми странах

4.

	I	II	III
Ангола	-0,48	-0,53	0,48
Аргентина	-0,45	0,63	-0,70
Австралия	-0,67	-0,39	-0,48
Китай	0,48	-0,39	0,67
X = Куба	0,70	0,63	0,45
Япония	0,34	-0,22	-0,34
США	0,56	0,80	-0,56
Зимбабве	-0,48	-0,53	0,48

По оси I стимулы упорядочены примерно по направлению с Севера на Юг. Страны Южного полушария — Ангола, Аргентина, Австралия, Зимбабве — находятся на отрицательном конце этой оси. Страны Северного полушария — Китай, Куба, Япония, США — находятся на ее положительном конце. Упорядочение с Севера на Юг не является, однако, точным; отметим, например что Куба имеет более высокое шкальное значение, чем США, хотя Куба намного южнее. Тем не менее ось I можно приближенно интерпретировать как расположение стран по оси Север — Юг.

Координатная ось II может рассматриваться как ось Восток — Запад. На ее положительном конце расположены страны Западного полушария — Аргентина, Куба, США. На отрицательном конце — страны Восточного полушария — Ангола, Австралия, Китай, Япония, Зимбабве.

Ось III можно считать осью, отражающей политическую ориентацию стран. На ее положительном конце — Ангола, Китай, Куба, Зимбабве. На отрицательном конце — Аргентина, Австралия, Япония, США.

Р. Шепард [Shepard, 1962] предложил метод оценки координат стимулов при существенно менее жестких предположениях, чем у Торгерсона [Torgerson, 1952]. В то время как модель Торгерсона требует, чтобы данные были пропорциональны расстояниям, требование Шепарда состоит только в том, чтобы данные были монотонно связаны с расстояниями. Точнее, его алгоритм основан на предположении, что при отсутствии ошибок измерения и выборки данные о различии будут иметь следующий вид:

$$\delta_{ij} = f(d_{ij}) = f \left[\sum_k (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}. \quad (5.1)$$

Здесь f — произвольная монотонная функция, такая, что

$$d_{ij} < d_{i'j'} \Rightarrow f(d_{ij}) < f(d_{i'j'}) \quad (5.2)$$

для всех i, i', j, j' .

Примерами таких функций могут служить линейная, степенная, показательная и логарифмическая функции. Любой алгоритм оценки координат стимулов, основанный на предположении, что данные связаны с расстояниями в пространстве неизвестной монотонной функцией f , удовлетворяющей (5.2), называется *алгоритмом неметрического многомерного шкалирования*. С помощью алгоритмов неметрического многомерного шкалирования находят в пространстве выбранной заранее размерности такие оценки координат стимулов \hat{x}_{ik} , что у подсчитанных по этим оценкам координат оценок расстояний \hat{d}_{ij} ранговый порядок близок, насколько это возможно, к ранговому порядку исходных данных δ_{ij} .

Вскоре после статьи Шепарда [Shepard, 1962] Дж. Краскал [Kruskal, 1964] описал другой алгоритм подгонки данных, позволяющий решить еще более общую задачу: данные предполагаются монотонно связанными с расстояниями в любом пространстве Минковского. До объяснения алгоритма Краскала необходимо описать метрики Минковского.

МЕТРИКИ МИНКОВСКОГО

Евклидова метрика (1.5) является частным случаем более общей метрики Минковского:

$$d_{ij} = (\sum |x_{ik} - x_{jk}|^p)^{1/p} \quad (p \geq 1). \quad (5.3)$$

Особенно интересны несколько частных случаев, соответствующих различным значениям p . Во-первых, при $p = 2$ (5.3) сводится к стандартному евклидову расстоянию (1.5).

При приближении p к ∞ (5.3) стремится к метрике доминирования, в которой расстояние между стимулами i и j определяется разностью между координатами только по одной оси, по той, по которой величина $|x_{ik} - x_{jk}|$ максимальна, т. е.

$$d_{ij} = \max_k |x_{ik} - x_{jk}|. \quad (5.4)$$

Координатная ось, определяющая расстояние d_{ij} , будет, вообще говоря, меняться от одной пары стимулов к другой.

Еще один интересный частный случай — метрика города*, в которой $p = 1$ [Attneave, 1950]. В метрике города

$$d_{ij} = \sum_k |x_{ik} - x_{jk}|. \quad (5.5)$$

Эта метрика называется метрикой города, так как в двумерном пространстве расстояние между точками i и j совпадает с расстоянием, пройденным от точки, соответствующей стимулу i , до точки, соответствующей стимулу j , по улицам города, идущим параллельно координатным осям.

Если для какого-либо набора стимулов стимульное пространство одномерно, то d_{ij} будет одним и тем же независимо от значения p в расстоянии Минковского. В пространстве размерности два и выше одни и те же координаты дадут различные расстояния в зависимости от того, взяты ли эти расстояния в евклидовой метрике (1.5), метрике доминирования (5.4) или метрике города (5.5). Рассмотрим, например, стимулы В и С на рис. 5 1. Евклидово расстояние между ними ($p = 2$)

$$\begin{aligned} d_{BC} &= \left[\sum_k (x_{Bk} - x_{Ck})^2 \right]^{1/2} = \\ &= \{ [2 - (-2)]^2 + [1 - (-1)]^2 \}^{1/2} = (20)^{1/2} = 4,47. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В метрике доминирования расстоянием между В и С является модуль разности значений их координат по той оси, по которой этот модуль разности максимален:

$$d_{BC} = \max_k |x_{Bk} - x_{Ck}| = |2 - (-2)| = 4,00. \quad (5.7)$$

* Иногда называется манхэттенской метрикой. — Примеч. пер.

Метрика доминирования дает меньшее значение расстояния между точками В и С, чем евклидова метрика. Метрика города дает большее расстояние. Расстояние в метрике города между В и С равно:

$$d_{BC} = \sum_k |x_{Bk} - x_{Ck}| = |2 - (-2)| + |1 - (-1)| = 6,00. \quad (5.8)$$

Различие между этими метриками можно также представить длиной линий на рис. 51. Длина сплошной линии, связывающей точки В и С, совпадает с евклидовым расстоянием. Расстояние в метрике доминирования — длина пунктирной линии, соединяющей точки А и В. Расстояние в метрике города — сумма длин двух пунктирных линий, связывающих пары точек (А, В) и (А, С).

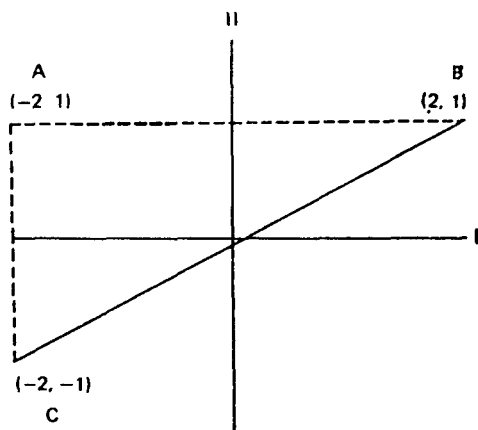


Рис 51 Расстояние между стимулами В и С в евклидовой метрике доминирования и метрике города

Алгоритм Краскала [Kruskal, 1964] позволяет пользователю оценивать по данным координаты стимулов таким образом, что при отсутствии ошибок измерения и выборки будет верно следующее:

$$\delta_{ij} = f(d_{ij}) = f\left[\left(\sum_k |x_{ik} - x_{jk}|^p\right)^{1/p}\right], \quad (5.9)$$

где f , как и выше, — произвольная монотонная функция, удовлетворяющая (5.2). Величина p с помощью алгоритма не оценивается, она должна задаваться пользователем.

Какое же значение p должен задать пользователь? Некоторые исследователи для выбора p прибегали к мерам соответствия [Arnold, 1971; Wiener — Ehrlich, 1978]. Они подгоняли к данным модели, различающиеся только величиной p в метрике Минковского, и выбирали ту модель (то значение p), которая обеспечивает наилучшую подгонку к данным. В работе [Sherman, 1972] отмечено, что этот подход следует применять с осторожностью. Если размерность K известна, то мера соответствия может служить для указания наилучшего значения p . Например, в [Wiener — Ehrlich, 1978] автор ограничился двумерными решениями. Если K неизвестно, то мера соответствия — неверный указатель наилучшего значения p [Sherman, 1972].

Программы неметрического многомерного шкалирования для ЭВМ обычно требуют намного больше машинного времени для подгонки неевклидовой модели ($p \neq 2$), чем для подгонки евклидовой модели ($p = 2$). Более того, различные вычислительные проблемы, описан-

ные ниже, встречаются чаще при подгонке неевклидовой модели. Если размерность неизвестна, как это обычно бывает, то большинство исследователей берет $p = 2$ — евклидову метрику. Если у исследователя нет серьезных теоретических причин предпочесть неевклидову модель или если неизвестна размерность, то по вычислительным соображениям применяют евклидову модель.

МЕРЫ СООТВЕТСТВИЯ

Важнейшим элементом алгоритма Краскала является мера соответствия, предложенная им для измерения того, насколько оценки координат стимулов \widehat{x}_{ik} и \widehat{x}_{jk} воспроизводят ранговый порядок данных δ_{ij} . Все основные неметрические алгоритмы, включая алгоритм Краскала, позволяют вычислить три набора параметров, на которых эта мера основана. Первый и самый важный набор — оценки координат \widehat{x}_{ik} . Второй набор содержит оценки расстояний, найденные по оценкам координат следующим образом:

$$\widehat{d}_{ij} = \left(\sum_k |\widehat{x}_{ik} - \widehat{x}_{jk}|^p \right)^{1/p}. \quad (5.10)$$

Третий набор содержит фиктивные параметры, которые Л. Гуттман [Guttman, 1968] назвал *ранговыми образами данных*. Другие авторы их называют *отклонениями*. Гуттмановский термин «ранговые образы» описывает фиктивные параметры точнее ввиду того, что, как это показано ниже, эти параметры отражают ранговый порядок данных. Тем не менее в дальнейшем мы будем применять более часто встречающийся термин — отклонения. *Отклонения* $\widehat{\delta}_{ij}$ — это величины, подсчитанные таким образом, чтобы они были, насколько это возможно, близки к оценкам расстояний \widehat{d}_{ij} при условии, что монотонно связаны с исходными данными. Иначе говоря, они должны соответствовать, насколько это возможно, оценкам расстояний при условиях монотонности:

$$\delta_{ij} < \delta_{i'j'} \Rightarrow \widehat{\delta}_{ij} \leq \widehat{\delta}_{i'j'}, \quad (5.11)$$

для всех i, i', j, j' .

Именно отклонения и оценки расстояний **наиболее** важны при определении мер соответствия.

Связи

Выражение (5.11) ничего не говорит о взаимоотношениях между отклонениями $\widehat{\delta}_{ij}$ и $\widehat{\delta}_{i'j'}$, когда соответствующие значения данных связаны $\delta_{ij} = \delta_{i'j'}$. Есть два различных подхода к обработке связей

в данных — первый (или развязывание) и второй (или связывание). При первом подходе монотонная функция, описывающая зависимость отклонений от исходных данных, должна удовлетворять только условиям, записанным в (5.11). На отношения между $\widehat{\delta}_{ij}$ и $\widehat{\delta}_{i'j'}$ при связи в данных не налагается никаких ограничений. Вычисляемая оценка отклонения $\widehat{\delta}_{ij}$ может быть равна $\widehat{\delta}_{i'j'}$, может быть больше, чем $\widehat{\delta}_{i'j'}$, или меньше.

При втором подходе отклонения вычисляются таким образом, чтобы они удовлетворяли условию (5.11) и добавочному условию (5.12):

$$\delta_{ij} = \delta_{i'j'} \Rightarrow \widehat{\delta}_{ij} = \widehat{\delta}_{i'j'} \quad (5.12)$$

для всех i, i', j, j' .

Большинство исследователей рекомендуют первый подход, так как он обеспечивает большее соответствие данным. Вне зависимости от того, подсчитаны ли отклонения согласно первому или второму подходу к связям, они играют существенную роль в определении всех трех мер соответствия, на которых построены основные алгоритмы неметрического многомерного шкалирования. Эти меры соответствия называются «стресс», «S-стресс» и «коэффициент отчуждения».

Стресс

Дж. Краскал использовал отклонения для определения меры соответствия, которую он назвал «стресс» и которую часто называют «стресс, формула 1» (S_1) в отличие от меры соответствия «стресс, формула 2» (S_2).

$$S_1 = \left[\frac{\sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{ij} - \widehat{d}_{ij})^2}{\sum_{(i,j)} \widehat{d}_{ij}^2} \right]^{1/2} \quad (5.13)$$

Стресс, формула 2, определяется следующим образом:

$$S_2 = \left[\frac{\sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{ij} - \widehat{d}_{ij})^2}{\sum_{(i,j)} (\widehat{d}_{ij} - \widehat{d}_{..})^2} \right]^{1/2} \quad (5.14)$$

В (5.14)

$$\widehat{d}_{..} = \frac{1}{IJ} \sum_{(i,j)} \widehat{d}_{ij} \quad (5.15)$$

Иначе говоря, $\widehat{d}_{..}$ — среднее арифметическое оцененных расстояний. S_1 и S_2 различаются только нормализующей константой в знаменателе дроби под знаком квадратного корня. Нормализующей константой

в S_1 служит сумма квадратов оценок расстояний. В S_2 нормализующей константой является величина, пропорциональная дисперсии оценок расстояний, — сумма квадратов отклонений оценок расстояний от среднего значения.

Три основных программы неметрического шкалирования — M-D-SCAL [Kruskal and Carmone, undated], TORSCA [Young and Torgerson, 1967] и KYST [Kruskal et al., 1973]* — позволяют получить оценки координат, минимизирующие стресс. KYST, самая последняя из них, обладает лучшими свойствами M-D-SCAL и TORSCA. Одно из преимуществ программы KYST в том, что она дает пользователю возможность выбрать в качестве минимизируемой для оценки координат функции оба варианта стресса, формулы 1 и 2. Многие авторы [Kruskal and Carroll, 1969; Roskam, 1969; Takane et al., 1977] пришли к выводу, что при симметрической матрице различия (или сходства) обсуждаемые ниже вычислительные проблемы окажутся менее сложными при применении формулы 1. С другой стороны, если данные являются предпочтениями, то подобные проблемы упростит формула 2.

S-стресс

В алгоритме ALSICAL Ф. Юнга [Takane et al., 1977; Young and Lewyckuj, 1979] используется мера соответствия «S-стресс». S-стресс также имеет два варианта — формулы 1 и 2. S-стресс, формула 1, определяется следующим образом:

$$SS_1 = \left[\frac{\sum_{(i,j)} (\hat{\delta}_{ij}^2 - \hat{d}_{ij}^2)^2}{\sum_{(i,j)} (\hat{d}_{ij}^2)^2} \right]^{1/2} \quad (5.16)$$

S-стресс, формула 1, и стресс, формула 1, различаются только тем, что SS_1 в (5.16) основан на квадратах расстояний и квадратах отклонений. С другой стороны, S_1 в (5.13) основан на расстояниях и отклонениях.

S-стресс, формула 2, определяется так:

$$SS_2 = \left[\frac{\sum_{(i,j)} (\hat{\delta}_{ij}^2 - \hat{d}_{ij}^2)^2}{\sum_{(i,j)} (\hat{d}_{ij}^2 - \hat{d}_{..}^2)^2} \right]^{1/2} \quad (5.17)$$

В (5.17)

$$\hat{d}^2 = \frac{1}{IJ} \sum_{(i,j)} \hat{d}_{ij}^2 \quad (5.18)$$

* Подробнее об упоминаемых здесь и других программах многомерного шкалирования см. в статье [Kruskal, 1977a] из списка дополнительной литературы. — Примеч. пер.

Это — среднее значение оценок квадратов расстояний. S-стресс, формула 2, (5.17), аналогичен стрессу, формула 2, (5.14). Последний, однако, основан на квадратах расстояний и отклонений.

ALSCAL позволяет пользователю выбрать в качестве минимизируемой для оценки координат функции оба варианта S-стресса, формулы 1 и 2. Формула 1 рекомендуется в том случае, если данные представляют собой различия (или сходства), а не предпочтения. Для пользователя, не располагающего двумя программами — для неметрического анализа данных о различиях и для анализа индивидуальных различий в данных о различиях (см. гл. 6), — может оказаться полезным именно алгоритм ALSCAL. Он может применяться как для выполнения неметрического шкалирования, так и для некоторых из описанных в гл. 6 методов анализа индивидуальных различий. Поскольку пакет программ SAS содержит версию ALSCAL, она доступна всем, кто может пользоваться этим пакетом [Young et al., 1980].

Коэффициент отчуждения

Л. Гуттман [Guttman, 1968] предложил третью меру для неметрического анализа — коэффициент отчуждения. Для определения коэффициента отчуждения вначале вводится коэффициент монотонности:

$$\mu = \frac{\sum_{(i,j)} \widehat{\delta}_{ij} \widehat{d}_{ij}}{[(\sum_{(i,j)} \widehat{\delta}_{ij}^2)(\sum_{(i,j)} \widehat{d}_{ij}^2)]^{1/2}} \quad (5.19)$$

По существу μ является ранговой мерой согласованности, указывающей степень порядковой связи между исходными данными и оценками расстояний. Коэффициент отчуждения — это мера соответствия: чем больше соответствие, тем больше будет величина μ .

Коэффициент отчуждения выражается через μ следующим образом:

$$\kappa = (1 - \mu^2)^{1/2}. \quad (5.20)$$

Чем лучше подогнана неметрическая модель к данным, тем меньше будет κ ; поэтому κ — мера несоответствия. Программа минимального пространственного анализа (SSA) Дж. Лингоса [Lingoes, 1973] позволяет получить оценки координат, максимизирующие коэффициент монотонности и минимизирующие коэффициент отчуждения*.

* Еще одна заслуживающая упоминания мера — коэффициент θ , являющийся, как стресс, S-стресс и κ , мерой несоответствия, — приведена в [Johnson, 1973] (см. также обзор [Каменский, 1977а], где описаны другие меры и исследования их взаимосвязи). Эта мера не требует построения отклонений. Она основана

РАЗМЕРНОСТЬ, ПОВОРОТ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Основная часть ввода в любую программу неметрического многомерного шкалирования — матрица различий. Печать состоит из следующих основных элементов: во-первых, мера соответствия — стресс, S-стресс или коэффициент отчуждения и, во-вторых, матрица X размером $I \times K$ оценок координат стимулов. Решения о размерности, вращении и интерпретации основаны преимущественно на этих двух элементах. До обсуждения размерности, поворота и интерпретации необходимо сказать несколько слов о данных, используемых для разъяснения этих вопросов.

Пример

Таблица 5.1 Корреляции шкал из каталога предпочтения профессий в выборке, состоящей из 1234 человек

Шкала	Р	И	Х	Г	П	Т
Реалистичная (Р)	1,00	0,46	0,16	0,21	0,30	0,36
Исследовательская (И)	0,46	1,00	0,34	0,30	0,16	0,16
Художественная (Х)	0,16	0,34	1,00	0,42	0,35	0,11
Гуманитарная (Г)	0,21	0,30	0,42	1,00	0,54	0,38
Предпринимательская (П)	0,30	0,16	0,35	0,54	1,00	0,68
Традиционная (Т)	0,36	0,16	0,11	0,38	0,68	1,00

Источник. [Holland, Whitney, Cole and Richards, 1969]. Печатается с разрешения издателя.

Данные табл. 5.1 взяты из работы [Rounds et al, 1979]. В ней приведены корреляции между шестью шкалами из каталога предпочтения профессий Холланда [Vocational Preference Inventory, Holland, 1965] в выборке, состоящей из 1234 человек. Каждая шкала соответст-

на перебору всех четверок точек. В обозначениях этой книги она имеет следующий вид:

$$\theta^2 = \frac{\sum_{\substack{(i < j, k < l) \\ (i, j) \neq (k, l)}} \varepsilon_{ij,kl} (\hat{d}_{ij}^2 - \hat{d}_{kl}^2)^2}{\sum_{\substack{(i < j, k < l) \\ (i, j) \neq (k, l)}} (\hat{d}_{ij}^2 - \hat{d}_{kl}^2)^2}, \quad (5.20a)$$

где

$$\varepsilon_{ij,kl} = \begin{cases} 1, & \text{если порядок расстояний } \hat{d}_{ij} \text{ и } \hat{d}_{kl} \text{ не совпадает с порядком} \\ & \text{величин } \delta_{ij} \text{ и } \delta_{kl} \text{ в исходных данных;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На этой мере основан алгоритм шкалирования, реализованный в приложенной к книге программе PARSUN. — Примеч. пер.

вует одному из шести типов занятий согласно теории выбора карьеры Холланда [Holland, 1973]. Дж. Холланд предложил модель типов профессий, часто представляемую в виде изображенного на рис. 5.2 шестиугольника. Согласно этой теории с точки зрения человеческой заинтересованности типы профессий, расположенные близко друг к другу вдоль шестиугольника, более похожи, чем типы профессий, далеко расположенные друг от друга. Наименее похожи типы профессий, расположенные на шестиугольнике друг против друга.

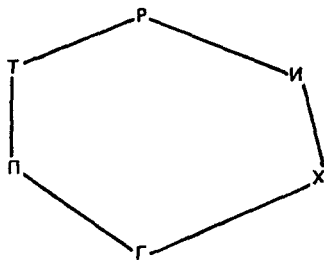


Рис. 5.2. Шестиугольная модель Холланда для шести типов профессий: Р — реалистичная, И — исследовательская, Х — художественная, Г — гуманитарная, П — предпринимательская, Т — традиционная

Так как шестиугольник — двумерная фигура, теория Холланда привела авторов статьи [Round et al., 1979] к гипотезе, что корреляции могут быть представлены в двумерном пространстве и стимулы, шесть шкал из каталога предпочтения профессий, будут расположены примерно в форме шестиугольника; порядок точек вдоль шестиугольника будет соответствовать их порядку в теории Холланда (см. рис. 5.2). Авторы указанной работы применили к своим данным программу TORSCA [Young and Torgerson, 1967], но описанные здесь результаты основаны на пересчете программой KYST [Kruskal et al., 1973] *.

В работе [Rounds et al., 1979] обсуждается конфигурационное применение многомерного шкалирования, предназначенное для исследования гипотезы о размерности и виде конфигурации, которая должна быть образована точками. Из анализа данных табл. 5.1 с применением программы KYST читателю станет понятно, как пользователь при неметрическом многомерном шкалировании выбирает размерность и интерпретирует результаты.

Размерность

Так же как в гл. 4, обсуждение в настоящей главе до сих пор проходило так, как будто размерность K известна. Однако на практике размерность конфигурации часто определяется в процессе анализа данных методами многомерного шкалирования. Для того чтобы в таких случаях определить K , получают решения в пространствах нескольких размерностей. Если K^* — наилучшая догадка исследователя о размерности, то можно получать решения в размерностях от $K^* - 3$

* К аналогичным результатам приводит пересчет программой парного неметрического шкалирования PARSUN, основанной на коэффициенте θ (5.20а), описанном в предыдущем примечании. — Примеч. пер.

до $K^* + 3$. Если $K^* \leq 3$, что делает $(K^* - 3) < 1$, то решения следует получать в пространствах размерности от 1 до $K^* + 3$.

Получив решения в пространствах различных размерностей, исследователь должен выбрать одно из них. Основу для выбора и здесь обеспечивают критерии интерпретируемости, воспроизводимости и соответствия. Критерий интерпретируемости диктует выбор минимально возможной размерности, в которой проявляются существенные характеристики стимулов (упорядочения или группировки их). Воспроизводимость требует, чтобы решение было составлено из тех координатных осей, которые возникают в разных подвыборках.

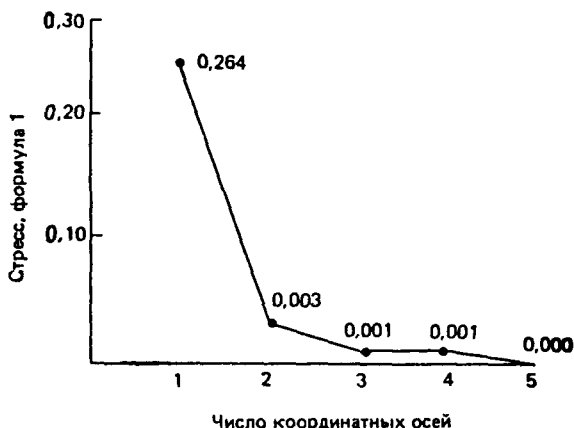


Рис. 5.3. Стресс и число координатных осей для многомерного шкалирования между шкалами каталога предпочтения профессий

Один из способов оценки соответствия — получить график зависимости меры соответствия от размерности, такой, как изображен на рис. 5.3. Такой график аналогичен рассмотренному в гл. 4 (см. рис. 4.4) графику зависимости собственных значений от размерности. Однако есть одно существенное различие. Если в графике зависимости меры соответствия от размерности изгиб должен быть именно на истинной размерности K , то в графике зависимости собственных значений от размерности изгиб должен быть на размерности $(K + 1)$. На рис. 5.3 график начинает снижаться на размерности 2, наводя, таким образом, на предположение о двумерности конфигурации.

Дж. Краскал и М. Виш [Kruskal and Wish, 1978, p. 56] отмечают, что не следует признавать решение со значением стресса выше 0,10, если это решение не одномерно. Однако если уровень ошибок измерения или выборки высок, то решение со значением стресса выше 0,10 признать можно. В размерности 1 стресс 0,15 и ниже представляет хорошее соот-

ветствие данным. Более того, Краскал и Виш [Kruskal and Wish, 1978] пришли к выводу, что редко возникает необходимость добавлять больше координатных осей, чем это необходимо для снижения стресса ниже 0,05. Для нашего примера правила Краскала и Виша явно указывают на размерность 2. Для снижения стресса ниже 0,05 требуется не более двух координатных осей.

В некоторых случаях могут быть другие индикаторы размерности. Одномерный набор стимулов часто образует при шкалировании в двумерном пространстве формы типа С или U. Упорядочение стимулов вдоль С или U должно соответствовать их упорядочению по одной координате. Некоторые двумерные конфигурации могут также быть в форме С или U. Тем не менее если двумерная конфигурация имеет форму С или U, то исследователь должен серьезно рассмотреть одномерное решение.

Поворот

При применении некоторых неевклидовых метрик проблемы поворота нет. Если X — решение, то $\widehat{X}^* = \widehat{X}T$, вообще говоря, не всегда будет решением¹. С другой стороны, если была применена евклидова метрика, то $\widehat{X}^* = \widehat{X}T$ всегда будет решением.

Даже и при применении евклидовой метрики проблема поворота не является серьезной в размерности 2, когда решаются задачи типа «сжатие данных» и «верификация конфигурации»; существенные характеристики стимулов могут быть идентифицированы вне зависимости от поворота.

Однако при координатных применениях многомерного шкалирования и использовании евклидовой метрики поворот — существенная проблема. Как и в метрическом решении, если неповернутые координаты соответствуют интерпретируемым упорядочениям стимулов, то поворот не является необходимым. Если поворот необходим, то можно попробовать объективный поворот. Если и это не приводит к получению интерпретируемого решения, то исследователю придется вращать решение вручную.

В примере из табл. 5.1 применение многомерного шкалирования является конфигурационным только в двумерном пространстве. Шестиугольную конфигурацию, если она появится, легко интерпретировать без поворота. Поэтому поворот в этом примере не существует.

¹ $\widehat{X}^* = \widehat{X}T$ будет решением, только если T — диагональная матрица и каждый диагональный элемент ее равен 1,00 или -1,00.

Интерпретация

В неметрическом многомерном шкалировании интерпретация решения происходит так же, как и в метрическом. Она состоит в основном в идентификации важных группировок и упорядочений стимулов. Кроме того, нужно назвать или описать характеристики стимулов, соответствующие каждому упорядочению, а также описать характеристики стимулов, которые являются общими в каждой из групп стимулов.

Для примера из табл. 5.1 двумерные координаты показаны в табл. 5.2. Эти координаты изображены на рис. 5.4. Анализируя рис. 5.4, можно убедиться, что точки действительно лежат примерно на шестиугольнике, хотя и не все стороны шестиугольника равны. Если начать рассмотрение с правого верхнего угла фигуры и обойти шестиугольник по часовой стрелке, то можно увидеть, что стимулы лежат в порядке, который соответствует теории Холланда. Как размерность полученного решения, так и конфигурация точек подтверждают гипотезу шестиугольника.

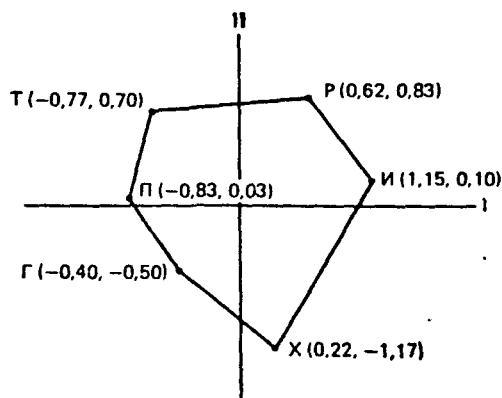


Рис. 5.4. Двумерная конфигурация шкал каталога предпочтения профессий: Р — реалистичная, И — исследовательская, Х — художественная, Г — гуманитарная, П — предпринимательская, Т — традиционная

Таблица 5.2. Двумерные координаты шкал из каталога предпочтения профессий

Шкала	Координата I	Координата II
Реалистичная	0,62	0,83
Исследовательская	1,15	0,10
Художественная	0,22	-1,17
Гуманитарная	-0,40	-0,50
Предпринимательская	-0,83	0,03
Традиционная	-0,77	0,70

Выводы

Проблемы размерности, поворота и интерпретации конфигурации в значительной степени одинаковы как в метрическом, так и в неметрическом шкалировании. Для выбора размерности следует получить

несколько решений в различных размерностях. Выбор одного из них должен быть сделан на основе интерпретируемости, воспроизводимости и соответствия. Полезными индикаторами размерности являются график зависимости меры соответствия от размерности, предложенные Краскалом и Вишем [Kruskal and Wish, 1978] границы значений этой меры и форма двумерной конфигурации.

Поворот конфигурации представляет собой серьезную проблему только тогда, когда применяется евклидова метрика. В координатных приложениях эта проблема более сложная, чем в конфигурационных или приложениях типа «сжатие данных». Поскольку важные характеристики обычно обнаруживаются в двумерном пространстве независимо от поворота, поворот становится более или менее сложной проблемой, начиная с размерности 3. Для получения интерпретируемого решения можно использовать объективные и ручные повороты. Интерпретация состоит в основном в идентификации существенных упорядочений и группировок стимулов.

ГРАФИКИ РАЗБРОСА

В табл. 5.3 приведены результаты анализа корреляций шкал каталога предпочтения профессий. В столбцах 1 и 2 указано, какая пара шкал соответствует каждой из строк табл. 5.3. В столбцах 3—5 приведены данные о сходстве, оценки отклонений и оценки расстояний

Таблица 5.3. Данные о близости, оценки отклонений и оцененные расстояния для двумерной конфигурации, полученной с помощью многомерного шкалирования из корреляций шкал каталога предпочтения профессий*

Строка	Столбец	Сходство	Отклонение	Оценка расстояния
И	Р	0,46	0,90	0,90
Х	Р	0,16	2,04	2,04
Х	И	0,34	1,59	1,57
Г	Р	0,21	1,67	1,67
Г	И	0,30	1,66	1,66
Г	Х	0,42	0,92	0,92
П	Р	0,30	1,66	1,66
П	И	0,16	1,98	1,98
П	Х	0,35	1,59	1,59
Т	Г	0,54	0,68	0,68
Т	Р	0,36	1,40	1,40
Т	И	0,16	2,01	2,01
Т	Х	0,11	2,12	2,12
Т	Г	0,38	1,25	1,25
Т	П	0,68	0,67	0,67

* Р — реалистичная, И — исследовательская, Х — художественная, Г — гуманитарная, П — предпринимательская, Т — традиционная.

для каждой пары шкал. Например, первый элемент столбца «Сходство» — корреляция между шкалами «исследовательская» и «реалистичная». Та же корреляция, 0,46, приведена и в строке 2 табл. 5.1. Другой пример — девятый элемент в столбце «Сходство» — корреляция 0,35 между шкалами «предпринимательская» и «художественная». То же приведено и в строке 5 столбца 3 табл. 5.1.

Оценки расстояний в последнем столбце табл. 5.3 были построены из оценок координат, приведенных в табл. 5.2. Например, первый элемент в этом столбце, 0,90, — это оценка расстояния между вторым стимулом («исследовательская») и первым стимулом («реалистичная»). Обозначая оцененное расстояние между этими двумя стимулами через $\hat{d}_{ИР}$, а оценки координат этих стимулов в табл. 5.2 через $\hat{x}_{Ик}$ и $\hat{x}_{Рк}$, можно записать:

$$\hat{d}_{ИР} = \left[\sum_k (\hat{x}_{Ик} - \hat{x}_{Рк})^2 \right]^{1/2} = \\ = [(1,15 - 0,62)^2 + (0,10 - 0,83)^2]^{1/2} = 0,90. \quad (5.21)$$

Другой пример: $\hat{d}_{ПХ}$ — девятый элемент в последнем столбце табл. 5.3 может быть рассчитан по табл. 5.2 следующим образом:

$$\hat{d}_{ПХ} = \left[\sum_k (\hat{x}_{Пк} - \hat{x}_{Хк})^2 \right]^{1/2} = \\ = [(-0,83 - 0,22)^2 + (0,03 - (-1,17))^2]^{1/2} = 1,59 \text{ и т. д.} \quad (5.22)$$

В литературе по многомерному шкалированию иногда обсуждаются три вида графиков разброса. Один из них Л. Гуттман назвал *диаграммой образов*. По одной оси откладываются оценки расстояний, а по другой — отклонения. На рис. 5.5 показан такой график, построенный по данным из табл. 5.3. На диаграмме образов каждой паре стимулов соответствует одна точка. (Кажется, что этот график содержит только 14 точек, хотя пар всего 15. Причина в том, что две пары имеют одни и те же значения данных и отклонений, 1,66, и поэтому попадают на графике в одну точку.) Вертикальная ось каждой точки соответ-

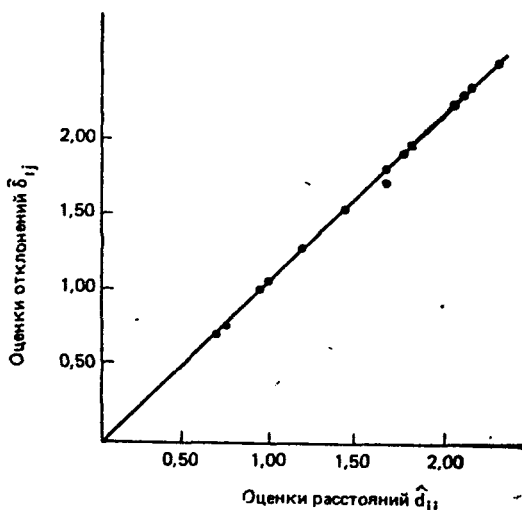


Рис. 5.5. Оценки отклонений, изображенные вместе с оценками расстояний, для двумерной конфигурации, полученной с помощью многомерного шкалирования из корреляций шкал каталога предпочтения профессий

вует ее отклонению из графы 4 табл. 5.3. Ее положение по горизонтальной оси соответствует расстоянию в графе 5 табл. 5.3.

Если данные полностью удовлетворяют модели, т. е. мера несоответствия будет нулем, то эти точки лягут на прямую линию, проходящую через начало координат под углом 45° к горизонтальной оси. На рис. 5.5. точки только слегка отклоняются от этой линии. Чем больше точки от нее отстоят, тем хуже соответствие модели данным. Наиболее сильно

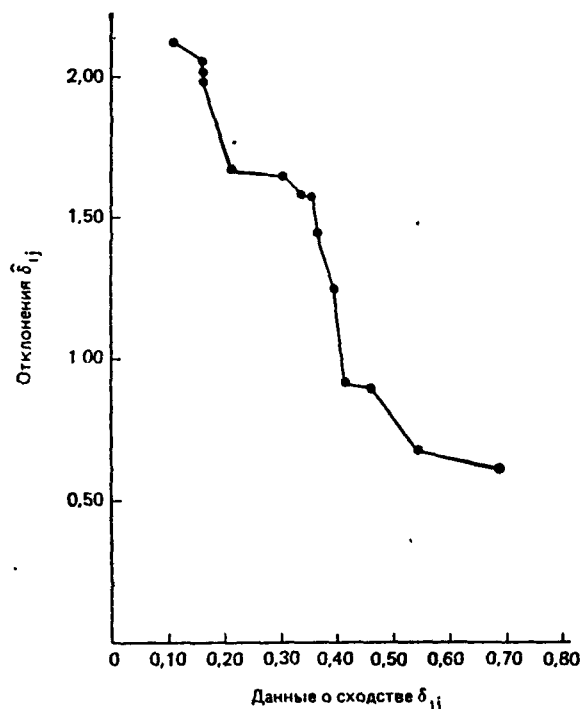


Рис 5.6 Оценки отклонений, изображенные вместе с данными о сходстве, для двумерной конфигурации, полученной с помощью многомерного шкалирования из корреляций шкал каталога предпочтения профессий

отклоняющиеся точки — это те точки, которые меньше всего удовлетворяют неметрической дистанционной модели. Тщательный анализ резко выделяющихся наблюдений может привести к выявлению теоретически важных отклонений от модели.

Второй интересный график разброса — график зависимости отклонений от исходных данных. На рис. 5.6 приведены отклонения, изображенные вместе с данными о сходстве. Здесь снова одна точка для каждой пары стимулов. (И этот график кажется содержащим 14 точек, хотя пар шкал 15. Причина в том, что у двух пар одно и то же значение данных, 0,30, и одно и то же отклонение, 1,66, поэтому они попадают в одну и ту же точку

на графике). Вертикальная ось представляет собой значение отклонения для каждой пары стимулов, а горизонтальная — значение данных для той же пары. Эта диаграмма дает наглядное представление функции f из (5.1) или (5.9) — монотонной функции связывающей данные с расстояниями в правых частях этих формул.

Хотя третий тип графиков разброса не приведен, можно нарисовать зависимость оцененных расстояний (\hat{d}_{ij}) от исходных данных (δ_{ij}). Такой график позволяет получить еще один способ представления мо-

нотонной функции f из (5.1) или (5.9). Эти два наглядных представления монотонной функции — зависимость оценок расстояний от исходных данных и зависимость отклонений от исходных данных — называются *диаграммами Шепарда*.

Помимо прочего, по значениям на диаграмме образов (см. рис. 5.5) можно рассчитать стресс, формула 1. Эти значения приведены также в графах 4 и 5 табл. 5.3. Знаменатель дроби под знаком квадратного корня в стрессе, формула 1, (5.13) равен:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)} \widehat{d}_{ij}^2 &= (0,90)^2 + (2,04)^2 + (1,57)^2 + (1,67)^2 + (1,66)^2 + \\ &+ (0,92)^2 + (1,66)^2 + (1,98)^2 + (1,59)^2 + (0,68)^2 + \\ &+ (1,40)^2 + (2,01)^2 + (2,12)^2 + (1,25)^2 + (0,67)^2 = \\ &= 36,00. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Числитель дроби под знаком квадратного корня в (5.13) равен:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{ij} - \widehat{d}_{ij})^2 &= (0,90 - 0,90)^2 + (2,04 - 2,04)^2 + \\ &+ (1,57 - 1,57)^2 + (1,67 - 1,67)^2 + \\ &+ (1,66 - 1,66)^2 + (0,92 - 0,92)^2 + \\ &+ (1,66 - 1,66)^2 + (1,98 - 1,98)^2 + \\ &+ (1,59 - 1,59)^2 + (0,68 - 0,68)^2 + \\ &+ (1,40 - 1,40)^2 + (2,01 - 2,01)^2 + \\ &+ (2,12 - 2,12)^2 + (1,25 - 1,25)^2 + \\ &+ (0,67 - 0,67)^2 = 0,0004. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Объединяя результаты (5.23) и (5.24), получим

$$S_1 = \left(\frac{0,0004}{36,00} \right)^{1/2} = 0,003. \quad (5.25)$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Вне зависимости от того, какая из мер соответствия использована, существует некоторый набор уравнений, которым удовлетворяют отличия $\widehat{\delta}_{ij}$ и оценки координат \widehat{x}_{ik} , \widehat{x}_{jk} , минимизирующие эту меру. Эти уравнения могут быть названы уравнениями решения. Цель любого алгоритма — найти оценки отклонений и координат, удовлетворяющие этим уравнениям. Уравнения решения всегда сложны и не могут быть решены стандартными алгебраическими методами. Их следует решать такими методами численного анализа, как градиентные.

Первый шаг в любом градиентном методе — получить первоначальную матрицу координат симулов $\widehat{X}_{(I \times K)}$, называемую *стартовой кон-*

фигурацией. Стартовая конфигурация — это первоначальная догадка о координатах. Каждый последовательный шаг алгоритма называется итерацией. На каждой итерации оценки координат стимулов \hat{X} изменяются таким образом, чтобы они лучше приближали координаты, удовлетворяющие уравнениям решения. Если все идет хорошо, то итерации продолжаются до тех пор, пока не находят оценки координат и отклонений, удовлетворяющие уравнениям решения.

К сожалению, в итерационном процессе могут возникнуть некоторые неприятности. Эти потенциальные проблемы называются проблемой локального минимума, проблемой вырожденных решений и проблемой сходимости. Все они будут рассмотрены.

Локальные минимумы

Как правило, уравнениям решения удовлетворяют несколько наборов параметров (оценок координат и отклонений). Статистики соответствия у разных наборов (решений) не равны. Набор параметров, который соответствует минимальному значению меры (стресса, S-стресса или коэффициента отчуждения), называется *глобальным минимумом*. Все другие наборы параметров, удовлетворяющие уравнениям решения, называются *локальными минимумами*.

Желательное решение — это набор оценок параметров, дающий глобальный минимум меры соответствия. Алгоритмы же позволяют получить параметры, удовлетворяющие уравнениям решения, но не обязательно те параметры, которые соответствуют глобальному минимуму. Проблема локального минимума сводится к гарантии, что решение соответствует глобальному минимуму меры соответствия, а не одному из локальных минимумов.

Хорошая стартовая конфигурация служит гарантией того, что решение является глобальным минимумом, а не локальным. Наилучшие результаты в получении такой конфигурации обеспечивают варианты метода метрического шкалирования Торгерсона (см. гл. 4). Программы ALSAL [Young and Lewyckyj, 1979], KYST [Kruskal et al., 1973], SSA [Lingoes, 1973] и TORSCA [Young and Torgerson, 1976] позволяют применять алгоритм метрического шкалирования Торгерсона (Torgerson, 1958) для построения стартовой конфигурации. Все эти программы начинаются с применения к данным о различии (сходстве) монотонного преобразования, хотя в разных программах преобразования разные. Затем для получения оценок координат в K -мерном пространстве используется метод Торгерсона [Torgerson, 1952]. Эти оценки координат становятся стартовой конфигурацией \hat{X}^0 для неметрического шкалирования в K -мерном пространстве.

Стартовые конфигурации, порожденные различными вариантами алгоритма Торгерсона (Torgerson, 1952), называются *рациональными стартовыми конфигурациями*. Алгоритмы, использующие рациональ-

ные стартовые конфигурации, менее подвержены попаданию в локальные минимумы, чем алгоритмы, использующие нерациональный старт [Arabie, 1978; Clark, 1976; Lingoes and Roskam, 1973; Spence, 1972, 1974; Spence and Young, 1978]. M-D-SCAL [Kruskal and Carmone, undated], не использующая рационального старта, более подвержена попаданию в локальные минимумы, чем программа KYST [Kruskal et al., 1973].

П. Эраби [Arabie, 1973, 1978] предложил чрезвычайно консервативный подход к проблеме локального минимума. Он пытается доказать, что следует получить до 20 решений, пользуясь различными стартовыми конфигурациями, и выбрать из них то, которое обеспечивает наибольшее соответствие данным. Вывод Эраби кажется успешным. Как справедливо отмечают И. Спенс и Ф. Юнг [Spence and Young, 1978], вывод Эраби сделан без какого-либо систематического сравнения подхода множественного старта с подходом рационального старта, лежащим в основе большинства программ. Кроме того, подход множественного старта является дорогостоящим, требующим много машинного времени и, главным образом, никак систематически не проверенным. Однако для некоторых типов данных он может оказаться приемлемым.

Вырожденные решения

Решение называется вырожденным, если число различных точек на полученной конфигурации намного меньше числа точек-стимулов. На рис. 5.7 приведено вырожденное двумерное решение. Заметим, что

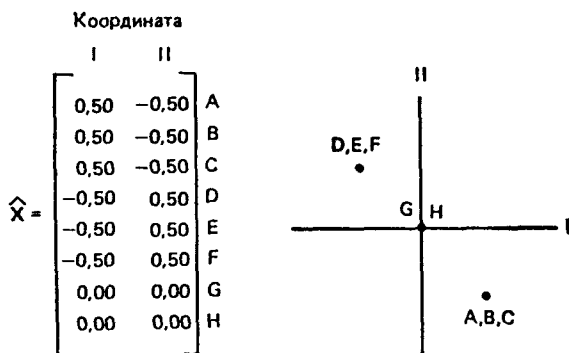


Рис. 5.7. Вырожденное решение для восьми точек в размерности 2

у стимулов A, B и C одинаковые координаты по обеим осям, и поэтому на конфигурации они сливаются в одну точку. Аналогично в одну точку сливаются стимулы D, E и F, так как и у них координаты одинаковые. Последние два стимула G и H тоже сливаются в одну точку. Следо-

вательно, на конфигурации будет только три различных точки, хотя всего стимулов восемь. Решение вырожденное, поскольку число различных точек (три) мало по сравнению с числом стимулов (восемь).

Исследователь должен всегда анализировать, не является ли полученное им решение вырожденным, в особенности если это решение в размерностях 1 или 2. Р. Шепард [Shepard, 1974] отмечает, что решения с близкими к нулю значениями стресса часто вырожденные, поэтому исследователи должны специально анализировать решения с подозрительно низкими значениями статистик несоответствия. Вырожденное решение, если оно встретится, следует отвергнуть. Иногда вырожденное решение означает, что нужно применить к данным какой-либо метрический анализ, так как метрические методы не подвержены вырожденности.

Отсутствие сходимости

Из трех рассматриваемых в этом параграфе проблем — локальный минимум, вырожденность и отсутствие сходимости — самой простой, но наиболее часто встречающейся является отсутствие сходимости. Пользователь должен установить максимальное число итераций, которое он считает допустимым в решении задачи поиска параметров (шкальных значений стимулов и отклонений). В некоторых случаях число итераций, необходимое для получения решения, может превысить установленное максимальное число. Большинство программ печатают при этом сообщение типа «Достигнуто максимальное число итераций» для указания, что желаемое решение не достигнуто за разрешенное число итераций. Обычно в распечатке такое сообщение появляется рядом со значением статистики соответствия. Подобных трудностей можно избежать, увеличив допустимое число итераций.

Локальный минимум, вырожденность и отсутствие сходимости могут показаться весьма существенными проблемами. Локальный минимум часто можно обойти, применяя рациональную стартовую конфигурацию. Особенно сложные данные могут потребовать нескольких стартовых конфигураций. Вырожденность обычно легко идентифицируется. Иногда проблемы можно избежать путем метрического анализа. При отсутствии сходимости пользователь может решать задачу с большим числом итераций.

ПРИМЕР: ФОНЕМЫ СОГЛАСНЫХ

Р. Шепард [Shepard, 1972b, 1974] иллюстрирует способы применения многомерного шкалирования, сильно отличающиеся от описанных выше. В своей работе, относящейся к приложениям типа «сжатие данных». Шепард использует многомерное шкалирование для

получения представления стимулов в двумерном пространстве: представления, которое хорошо изображается графически. Как показано ниже, двумерная конфигурация дает способ наглядного изображения группировок стимулов. Стимулы Шепарда [Shepard, 1972b, 1974] — это 16 фонем согласных, показанных на рис. 5.8. Данные взяты из более ранней работы [Miller and Nicely, 1955]. В этом исследовании говорящий произносил каждую из фонем, а слушающий затем запи-

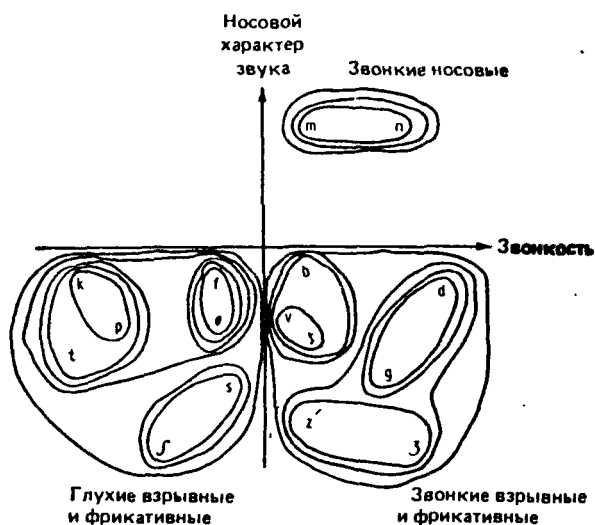


Рис. 5.8. Двумерная конфигурация 16 фонем согласных. Адаптировано из [Shepard, 1972 b] с разрешения издателя

сывал фонему, которую он считал произнесенной. Цель исследования — идентифицировать те характеристики стимулов, которые ведут к смешению их друг с другом.

В работе [Miller and Nicely, 1955] для исследования было взято 16 фонем, составляющих три четверти всех фонем согласных, которые мы произносим в обычной речи, и 40% всех фонем, включая гласные. Вероятно, четыре из них не знакомы большинству читателей, и будут здесь объяснены. /ʃ/ означает буквосочетание «sh», звучащее в слове «ship», /θ/ — «th», звучащее в «thumb», /ð/ — «th», звучащее в «though», а /z/ — «s», звучащее в «treasure».

Основная полученная в [Miller and Nicely, 1955] матрица — матрица смешения, каждый элемент которой — число случаев, когда был произнесен стимул-строка, а слушатель записал стимул-столбец. Предполагается, что чем более похоже звучат две фонемы, тем более вероятно смешение.

После преобразования матрицы смещения к симметрическому виду Шепард [Shepard, 1974] шкалирует стимулы в размерности 2. Его двумерное решение приведено на рис. 5.8. Шкалирование может быть проинтерпретировано на основе групп фонем. А именно произносимые фонемы кажутся группирующимися по нескольким характеристикам — являются ли они взрывными или фрикативными, носовыми, звонкими или переднеязычными, среднеязычными, заднеязычными (т. е. какой частью рта произносятся).

Начиная с правого верхнего угла рис. 5.8 и двигаясь по часовой стрелке, можно назвать следующие группировки. Во-первых, звонкие носовые {m, n}. Во-вторых, большая группа звонких взрывных и фрикативных {b, v, ð, d, g, z, ʒ}. Эта группа из семи стимулов-фонем может быть разделена на среднеязычные звонкие фрикативные {z, ʒ}, звонкие взрывные {d, g} и переднеязычные звонкие {b, v, ð}. В последней группе из трех фонем две — звонкие фрикативные {v, ð}.

Третья основная группа содержит семь глухих фонем {k, p, t, f, θ, s, ʃ}. Этот большой набор может быть разбит на глухие взрывные {k, p, t}, переднеязычные глухие фрикативные {f, θ} и среднеязычные глухие фрикативные {s, ʃ}. Звонкие фонемы лежат в правой части конфигурации, а глухие — в левой. Поэтому горизонтальная ось отражает звонкость. Две носовые фонемы лежат в верхней части конфигурации, и это наводит на мысль, что вертикальная ось отражает носовой характер звука.

Приложение многомерного шкалирования, предложенное Шепардом, принадлежит к категории «сжатие данных». Шкалирование здесь служит для сжатия структуры данных о смещении в двумерную конфигурацию, на которой можно явно изобразить кластеры стимулов. Рис. 5.8 иллюстрирует не только применение многомерного шкалирования типа «сжатие данных», но и способ обозначения группировок стимулов с помощью обведения их сплошной линией.

* СХЕМА АЛГОРИТМА

Существует большое число алгоритмов для выполнения неметрического шкалирования. Описанный здесь алгоритм поможет получить интересующемуся читателю грубое представление о том, как они работают. Более полное описание можно найти в [Guttman, 1968; Kruskal, 1964; Lingoes and Roskam, 1973; Takane et al., 1977; Young and Lewicki, 1979].

Каждый алгоритм состоит из четырех основных этапов. На первом этапе определяется стартовая конфигурация. На втором стандартизуются расстояния и оценки координат. Третий и четвертый этапы называются соответственно неметрическим и метрическим. Основная цель неметрического этапа — оценка отклонений*. Основная цель

* В алгоритме неметрического шкалирования [Johnson, 1973] этот этап отсутствует. — *Примеч. пер.*

метрического этапа — оценка координат стимулов. После того как определена стартовая конфигурация, каждая итерация состоит из одного этапа стандартизации, одного неметрического этапа и одного метрического этапа. Итерации продолжаются до тех пор, пока изменение меры соответствия от одной итерации к другой не станет меньше какого-либо небольшого числа, такого, как 0,001. Блок-схема на рис. 5.9 показывает основные этапы неметрического алгоритма.

Далее последовательно обсуждаются этапы неметрического алгоритма: получение стартовой конфигурации, стандартизация оценок расстояний и координатных оценок, неметрический и метрический этапы.

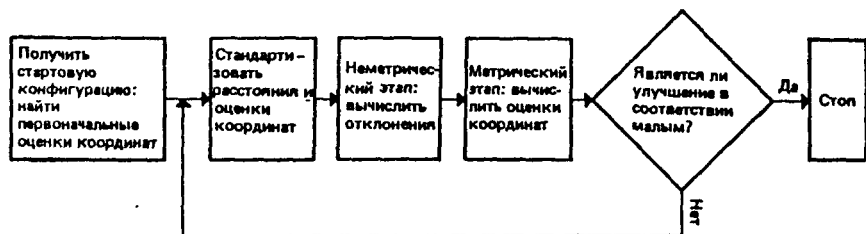


Рис. 5.9. Блок-схема неметрического алгоритма

В последующем обсуждении будем предполагать, что мера соответствия — это стресс, формула 1, что избран первый подход к обработке связей, а поиск решения ведется в размерности 2. Для иллюстрации будут взяты корреляции между шкалами каталога предпочтения профессий, приведенные в табл. 5.1. Так как мы рассматриваем анализ матрицы различий, а не матрицы сходств, корреляции в табл. 5.1 сначала преобразуются в различия:

$$\delta_{ij} = (1 - r_{ij})^{1/2}. \quad (5.26)$$

Вместо преобразования (5.26) можно использовать любое преобразование, заменяющее ранговый порядок данных на обратный ему ранговый порядок. Полученная таким образом матрица различий приведена в табл. 5.4.

Таблица 5.4. Различия, скалярные произведения и первоначальные оценки расстояний из неметрического шкалирования шкал каталога предпочтения профессий

	Различия						
	Р	И	Х	Г	П	Т	
Реалистичная (Р)	0,00						= Δ
Исследовательская (И)	0,73	0,00					
Художественная (Х)	0,92	0,82	0,00				
Гуманитарная (Г)	0,89	0,84	0,76	0,00			
Предпринимательская (П)	0,84	0,92	0,81	0,68	0,00		
Традиционная (Т)	0,80	0,92	0,94	0,79	0,57	0,00	

Скалярные произведения

	Р	И	Х	Г	П	Т	
Реалистичная (Р)	0,31]=Δ*
Исследовательская (И)	0,05	0,32					
Художественная (Х)	-0,11	-0,01	0,32				
Гуманитарная (Г)	-0,12	-0,07	-0,01	0,25			
Предпринимательская (П)	-0,09	-0,15	-0,06	0,01	0,22		
Традиционная (Т)	-0,03	-0,13	-0,15	-0,05	0,09	0,27	

Нестандартизованные оценки расстояний

	Р	И	Х	Г	П	Т
Реалистичная (Р)	0,000					
Исследовательская (И)	0,404	0,000				
Художественная (Х)	0,859	0,591	0,000			
Гуманитарная (Г)	0,761	0,681	0,373	0,000		
Предпринимательская (П)	0,732	0,828	0,698	0,332	0,000	
Традиционная (Т)	0,628	0,848	0,885	0,550	0,255	0,000

Стандартизованные оценки расстояний \hat{d}_{ij}^0

	Р	И	Х	Г	П	Т
Реалистичная (Р)	0,000					
Исследовательская (И)	0,158	0,000				
Художественная (Х)	0,337	0,232	0,000			
Гуманитарная (Г)	0,298	0,267	0,146	0,000		
Предпринимательская (П)	0,287	0,324	0,273	0,130	0,000	
Традиционная (Т)	0,246	0,332	0,347	0,215	0,100	0,000

Стартовая конфигурация

Любой алгоритм неметрического многомерного шкалирования начинается с шага, выполняемого один раз, — определения стартовой конфигурации. Лучшие способы получения стартовой конфигурации — рациональные подходы*, всегда использующие один из вариантов метрического алгоритма Торгерсона [Torgerson, 1952]. В нашем примере алгоритм из [Torgerson, 1952] был применен непосредственно к данным о различии из табл. 5.4. В верхней половине табл. 5.5 показаны первоначальные значения оценок, полученные с помощью пакета SPSS (статистический пакет для социологов) [Nie

* Точка зрения автора, что наилучший подход к выбору стартовой конфигурации — рациональный подход, является спорной. Среди часто применяемых стартовых конфигураций — случайные, т. е. полученные из случайных чисел, и Краскаловская [Kruskal, 1964]. Разумеется, при этом требуются расчеты с несколькими стартовыми конфигурациями и сравнение полученных решений. Если решения с различных стартовых конфигураций аналогичны, то расчеты можно считать законченными. — *Примеч. пер.*

Таблица 5.5. Стартовая конфигурация для неметрического шкалирования шкал каталога предпочтения профессий

Нестандартизованные оценки координат

	I	II		
Реалистичная	[]	-0,224	0,416
Исследовательская			-0,456	0,085
Художественная			-0,189	-0,442
Гуманитарная			0,134	-0,256
Предпринимательская			0,366	-0,018
Традиционная	0,378	0,237		

Стандартизованные оценки координат

	I	II		
Реалистичная	[]	-0,088	0,163
Исследовательская			-0,179	0,033
Художественная			-0,074	-0,173
Гуманитарная			0,052	-0,100
Предпринимательская			0,143	-0,007
Традиционная			0,148	0,093

$= \hat{x}_0$

et al., 1975] при извлечении первых двух главных компонент из матрицы скалярных произведений. В общем случае первые K главных компонент матрицы скалярных произведений составляют стартовую конфигурацию для K -мерного решения. Матрица, названная в табл. 5.4 «нестандартизованные оценки расстояний», содержит евклидовы расстояния, подсчитанные по оценкам координат, содержащимся в матрице нестандартизованных оценок координат табл. 5.5. Эти расстояния подсчитаны по формуле

$$\hat{d}_{ij}^0 = \left[\sum_k (\hat{x}_{ik}^0 - \hat{x}_{jk}^0)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.27)$$

В (5.27) \hat{x}_{ik}^0 и \hat{x}_{jk}^0 — первоначальные оценки координат для стартовой конфигурации, а \hat{d}_{ij}^0 — первоначальная оценка расстояний.

Стандартизация расстояний и оценок координат

После получения стартовой конфигурации начинается первая итерация. В начале каждой итерации многие алгоритмы предусматривают какую-либо стандартизацию текущих расстояний (\hat{d}_{ij}) и оценок координат (\hat{x}_{ik}). На первой итерации текущие расстояния и координаты — те, которые получены из стартовой конфигурации. Для всех итераций, кроме первой, текущие расстояния и оценки — те, что получены на метрическом этапе предыдущей итерации. Как показывает опыт, стандартизация расстояний снижает вероятность получения вырож-

денного решения. При использовании стресса, формула 1, удобно стандартизовать расстояния так, чтобы сумма их квадратов была равна 1,00: $\sum_{(i,j)} \widehat{d}_{ij}^2 = 1,00$. Когда расстояния стандартизируются таким образом, то S_1 сводится к

$$S_1 = \left[\sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{ij} - \widehat{d}_{ij})^2 \right]^{1/2}. \quad (5.28)$$

Поэтому минимизация S_1 становится эквивалентной минимизации F :

$$F = \sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{ij} - \widehat{d}_{ij})^2. \quad (5.29)$$

В описанном ниже алгоритме предполагается, что оценки расстояний стандартизованы таким образом, что сумма квадратов равна 1,00. Эта стандартизация может быть выполнена путем умножения каждой нестандартизованной оценки расстояния \widehat{d}_{ij} на такую константу, что сумма их квадратов будет равна 1,00. Поскольку оценки координат должны быть выражены в том же масштабе, что и расстояния, каждая оценка координат должна быть умножена на ту же константу. Обычно стандартизация проводится на каждой итерации непосредственно перед неметрическим этапом.

В нижней части табл. 5.4 приведены стандартизованные оценки расстояний, полученные путем умножения каждой нестандартизованной оценки расстояний из табл. 5.4 на такую константу, что сумма квадратов оценок равна 1,00. Умножение каждой нестандартизованной оценки координат из табл. 5.5 на ту же константу дает стандартизованные оценки координат, приведенные в нижней части табл. 5.5. Так как на неметрическом и метрическом этапах применяются только стандартизованные оценки координат и расстояний, в последующем обсуждении под «оценками расстояний» и «оценками координат» подразумеваются стандартизованные оценки.

Неметрический этап

На неметрическом этапе данные о различии и стандартизованные оценки расстояний из предыдущей итерации (или из стартовой конфигурации) используются для получения отклонений. Ряд описанных ниже проходов по данным составляет основную часть неметрического этапа на каждой из итераций. Однако до начала этих проходов данные δ_{ij} должны быть отсортированы в порядке возрастания. Начнем с описания упорядочения данных по возрастанию, а затем обсудим упомянутые проходы. Читатель должен понять, что каждая итерация содержит полную серию таких проходов. Неметрический этап не изменяет оценки координат стимулов и оценки расстояний, меняются только оценки различий. До описания неметрического этапа введем несколько обозначений.

Через $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ обозначим различие для пары стимулов (i, j) , которое должно быть определено на текущей $(c + 1)$ -й итерации. Пусть \widehat{x}_{ik}^c — оценка координаты на итерации c ($c = 0, \dots, C$). Если $c = 0$, то это оценки координат стартовой конфигурации. Наконец, \widehat{d}_{ij}^c — расстояние на итерации c :

$$\widehat{d}_{ij}^c = \left[\sum_k (\widehat{x}_{ik}^c - \widehat{x}_{jk}^c) \right]^{1/2}. \quad (5.30)$$

В наиболее распространенном варианте неметрического этапа (Kruskal, 1964) отклонения $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ вычисляются таким образом, что они составляют монотонное преобразование исходных данных δ_{ij} , т. е. отклонения удовлетворяют условию (5.11). Суть алгоритма не в том, что он позволяет находить какую-то хорошо известную непрерывную монотонную функцию (такую, как логарифмическая или степенная) и применять ее к данным. Неметрический этап состоит из ряда шагов, на которых каждое отклонение $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ устанавливается равным соответствующей оценке расстояний \widehat{d}_{ij}^c или среднему значению нескольких оценок расстояний.

Оценки расстояний на итерации c становятся первоначальными оценками отклонений на итерации $(c + 1)$. В нашем примере оценками отклонений для первой итерации являются стандартизованные оценки расстояний, приведенные в нижней части табл. 5.4. В столбце 4 табл. 5.6 содержатся оценки расстояний \widehat{d}_{ij}^0 , соответствующие каждому из элементов матрицы исходных данных δ_{ij} .

Первый шаг неметрического этапа — расположить данные о различии в одном столбце таким образом, чтобы они шли в убывающем порядке. Столбец 3 табл. 5.6 содержит данные о различии из табл. 5.4., расположенные по величине от самого маленького сверху до самого большого снизу. Например, самое маленькое значение из матрицы данных, $\delta_{ТП} = 0,57$, является первым сверху элементом столбца 3 табл. 5.6. Следующее по величине значение данных, $\delta_{ПГ} = 0,68$, является вторым сверху и т. д. Последнее различие в табл. 5.6 — это самое большое значение в табл. 5.4, $\delta_{ТХ} = 0,94$.

Сложности возникают, когда в данных имеются связи, т. е. для какой-то пары элементов матрицы данных $\delta_{ij} = \delta_{gh}$. Если $\delta_{ij} = \delta_{gh}$ и $\widehat{d}_{ij}^c = \widehat{d}_{gh}^c$, то неважно, что стоит раньше. Однако если $\delta_{ij} = \delta_{gh}$, а $\widehat{d}_{ij}^c \neq \widehat{d}_{gh}^c$, то отличия, связанные с меньшими оценками расстояний, должны идти раньше. В табл. 5.6 $\delta_{ГИ}$ было помещено над $\delta_{ПР}$, хотя эти значения идентичны ($\delta_{ГИ} = \delta_{ПР} = 0,84$), так как оценки расстояний (столбец 4) для первого из них, $\widehat{d}_{ГИ}^0 = 0,267$, меньше, чем для второго, $\widehat{d}_{ПР}^0 = 0,287$. Аналогично в табл. 5.6 $\delta_{ПИ}$ предшествует $\delta_{ТИ}$,

Таблица 5.6 Различия, расстояния и отклонения из примера со шкалами каталога предпочтения профессий.

Строка*	Столбец*	Различие	До слияния		После первого слияния		После второго слияния		Расстояние
			отклонение	блок	отклонение**	блок	отклонение**	блок	
Т	П	0,57	0,100	1	0,100	1	0,100	1	0,102
П	Г	0,68	0,130	2	0,130	2	0,130	2	0,126
И	Р	0,73	0,158	3	0,152	3	0,152	3	0,155
Г	Х	0,76	0,146	4	0,152	3	0,152	3	0,145
Т	Г	0,79	0,215	5	0,215	4	0,215	4	0,215
Т	Р	0,80	0,246	6	0,246	5	0,246	5	0,246
П	Х	0,81	0,273	7	0,273	6	0,253	6	0,268
Х	И	0,82	0,232	8	0,232	7	0,253	6	0,239
Г	И	0,84	0,267	9	0,267	8	0,267	7	0,270
П	Р	0,84	0,287	10	0,287	9	0,287	8	0,286
Г	Р	0,89	0,298	11	0,298	10	0,298	9	0,298
П	И	0,92	0,324	12	0,324	11	0,324	10	0,324
Т	И	0,92	0,332	13	0,332	12	0,332	11	0,333
Х	Р	0,92	0,337	14	0,337	13	0,337	12	0,337
Т	Х	0,94	0,347	15	0,347	14	0,347	13	0,346

* Р — реалистичная, И — исследовательская, Х — художественная, Г — гуманитарная, П — предпринимательская, Т — традиционная.
 ** В прямоугольниках блоки с более чем одним элементом.

а $\delta_{ТИ}$ предшествует $\delta_{ХР}$, хотя все три различия равны 0,92, поскольку $\widehat{d}_{ТИ}^0 < \widehat{d}_{ТИ}^1 < \widehat{d}_{ХР}^0$.

После упорядочения данных о различии по возрастанию алгоритм начинает серию проходов по данным. Как только эти проходы завершены, неметрический этап окончен. В начале первого из проходов на конкретной итерации отклонениями являются текущие оценки расстояний из предыдущей итерации или стартовой конфигурации. В начале каждого из последующих проходов на той же итерации отклонения берутся из предыдущего прохода. Столбец 4 табл. 5.6 содержит стандартизованные оценки расстояний из стартовой конфигурации (см. табл. 5.4), которые являются значениями отклонений для первого прохода неметрического этапа первой итерации. Проход начинается с разбиения оценок отклонений на блоки равных значений. У первоначальных оценок отклонений в табл. 5.6 связанных значений нет, так что каждое отклонение составляет свой собственный блок.

Оставшаяся часть каждого прохода состоит из сравнения соседних блоков. Пусть m ($m = 1, \dots, M$) будет индексом, обозначающим блоки от самого низкого ($m = 1$) до самого высокого ($m = M$). Обозначение блоков приведено в столбце 5 табл. 5.6. Начиная с $m = 1$, элементы m -го блока сравниваются с элементами $(m + 1)$ -го блока. Если

элементы m -го блока меньше, чем элементы $(m + 1)$ -го блока, то просто переходим к сравнению двух следующих блоков. Однако если элементы m -го блока больше, чем элементы $(m + 1)$ -го, то все элементы m -го и $(m + 1)$ -го блоков делаются равными среднему арифметическому элементов обоих блоков. После такого уравнивания m -го и $(m + 1)$ -го блоков все элементы обоих блоков будут равными, и их можно слить в один блок, который станет новым m -м блоком. Слив их, переходим к сравнению нового m -го блока с новым $(m + 1)$ -м блоком. Проход заканчивается после сравнения всех соседних блоков. Результат прохода — новый набор оценок отклонений. Если во время прохода никакие блоки не сливались, то неметрический этап текущей итерации закончен.

Однако если некоторые блоки сливались, то приступают к новому проходу. Каждый проход начинается с группировки текущих значений отклонений на блоки равных значений. Остаток прохода состоит из сравнения пар соседних блоков и, если необходимо, слияния. Проходы продолжаются до тех пор, пока на каком-то из них не потребуются слияние. Оценки отклонений, полученные на последнем проходе, являются искомыми оценками отклонений на итерации $(c + 1)$, $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$. Оценки отклонений, полученные на последней итерации — это окончательные оценки отклонений $\widehat{\delta}_{ij}$.

В столбце 4 табл. 5.6 элемент первого блока меньше, чем элемент второго, так что мы можем перейти к сравнению второго и третьего блоков. Элемент второго блока меньше, чем элемент третьего, так что переходим к блокам 3 и 4. Элемент в блоке 3 больше, чем в блоке 4, так что эти два элемента должны быть заменены их средним арифметическим $(0,158 + 0,146)/2,00 = 0,152$. В столбце 6 показана такая замена. Эти два элемента становятся новым блоком. Проход продолжается на элементах столбца 6.

Элемент в новом блоке 3, столбец 6, меньше, чем в блоке 4, блок 4 меньше блока 5 и блок 5 меньше, чем блок 6. Однако блок 6 больше, чем блок 7. Элементы в блоках 6 и 7 должны быть заменены их средним арифметическим, $(0,273 + 0,232)/2,00 = 0,253$, и слиты в новый блок. Новый объединенный блок 6 появляется в столбце 8. Проход продолжается на элементах столбца 8.

Элементы вновь созданного блока 6 меньше, чем элементы блока 7, блок 7 меньше, чем блок 8, и т. д. Сравнение оставшихся соседних блоков показывает, что слияний больше не требуется. И сравнением двух последних соседних блоков, 12 и 13, проход заканчивается.

Поскольку при первом проходе потребовалось слияние двух блоков, необходим второй проход. На втором проходе по элементам столбца 8 слияние не нужно. Следовательно, неметрический этап окончится после второго прохода. Числа в столбце 8 станут окончательными оценками отклонений на итерации $(c + 1) = 1$ и будут использоваться на метрическом этапе итерации.

После завершения проходов отклонения будут удовлетворять записанным в (5.11) условиям слабой монотонности. Неметрический этап — это применение монотонной регрессии Краскала (Kruskal, 1964), регрессии оценок расстояний по данным. В [Barlow et al., 1972] содержится общая дискуссия о монотонной регрессии, названной там изотонной. В [De Leeuw, 1977] доказано, что и при связях в данных алгоритмы монотонной регрессии обладают свойствами наименьших квадратов.

Метрический этап

Метрический этап следует за неметрическим. На этом этапе используются отклонения, рассчитанные на неметрическом этапе ($\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$), оценки расстояний на предыдущей итерации (\widehat{d}_{ij}^c) и оценки координат на предыдущей итерации (\widehat{x}_{ik}^c) для получения новых оценок координат (\widehat{x}_{ik}^{c+1}), по которым рассчитываются новые оценки расстояний ($\widehat{d}_{ij}^{(c+1)}$). Отклонения остаются неизменными. Мы начнем с описания функции, для минимизации которой предназначен метрический этап, а затем рассмотрим способ расчета новых оценок координат.

После получения оценок отклонений $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ следует для получения новых оценок координат \widehat{x}_{ik} перейти к метрическому этапу. Если расстояния стандартизованы таким образом, чтобы сумма квадратов равнялась 1,00, то стресс, формула 1, сводится к (5.28). Минимизация S_1 эквивалентна минимизации F в (5.29).

Приведем формулу для оценок координат $\widehat{x}_{ik}^{(c+1)}$, предложенную Дж. Лингосом и Э. Роскамом [Lingoes and Roskam, 1973], хотя ее вывод выходит за пределы этой книги:

$$\widehat{x}_{ik}^{(c+1)} = \widehat{x}_{ik}^c - \frac{1}{J} \sum_j \left(1 - \frac{\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}}{\widehat{d}_{ij}^c} \right) (\widehat{x}_{ik}^c - \widehat{x}_{jk}^c). \quad (5.31)$$

Формула (5.31) представляет собой выражение для вычисления новых оценок координат стимулов. Для того чтобы избежать деления на нуль, при $\widehat{d}_{ij}^c = 0,00$ отношение $(\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)})/\widehat{d}_{ij}^c$ произвольно устанавливается равным 1,00.

В правой части (5.31) берутся оценки координат \widehat{x}_{ik}^c на предыдущей итерации, последние оценки отклонений $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ и оценки расстояний на предыдущей итерации \widehat{d}_{ij}^c . Нижняя часть табл. 5.5 содержит последние оценки координат для нашего примера, \widehat{x}_{ik}^c . Столбец 8 табл. 5.6 содержит оценки отклонений, $\widehat{\delta}_{ij}^c$, а столбец 4 — оценки рас-

стояний, \hat{d}_{ij}^0 . Поэтому новые оценки координат \hat{x}_{ik}^1 можно найти по формуле (5.31) с привлечением информации из табл. 5.5. и 5.6.

Например, новая оценка координаты шкалы «Реалистичная» по оси I будет

$$\begin{aligned} \hat{x}_{P1}^1 &= \hat{x}_{P1}^0 - \frac{1}{6} \sum_i \left(\frac{1 - \hat{\delta}_{P1}^i}{\hat{d}_{P1}^0} \right) (\hat{x}_{P1}^0 - \hat{x}_{i1}^0) = \\ &= -0,088 - 1/6 \left\{ \left[1 - \frac{0}{0} \right] [-0,88 - (-0,88)] + \right. \\ &\quad + \left[1 - \frac{0,152}{0,158} \right] [-0,088 - (-0,179)] + \\ &\quad + \left[1 - \frac{0,337}{0,337} \right] [-0,088 - (-0,074)] + \left[1 - \frac{0,298}{0,298} \right] \times (0,088 - 0,052) + \\ &\quad + \left[1 - \frac{0,287}{0,287} \right] (-0,088 - 0,143) + \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{0,246}{0,246} \right] (-0,088 - 0,148) \right\} = -0,089. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Другой пример: вторая координата шкалы «Художественная» равна:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{X2}^1 &= \hat{x}_{X2}^0 - \frac{1}{6} \sum_i \left(1 - \frac{\hat{\delta}_{X2}^i}{\hat{d}_{X2}^0} \right) (\hat{x}_{X2}^0 - \hat{x}_{i2}^0) = \\ &= -0,173 - \frac{1}{6} \left\{ \left[1 - \frac{0,337}{0,337} \right] [-0,173 - 0,163] + \right. \\ &\quad + \left[1 - \frac{0,253}{0,232} \right] \cdot [-0,173 - 0,033] + \left[1 - \frac{0}{0} \right] [-0,173 - (-0,173)] + \\ &\quad + \left[1 - \frac{0,152}{0,146} \right] \cdot [-0,173 - (-0,100)] + \\ &\quad + \left[1 - \frac{0,253}{0,273} \right] [-0,173 - (-0,007)] + \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{0,347}{0,347} \right] [-0,173 - 0,093] \right\} = -0,175. \end{aligned} \quad (5.33)$$

В табл. 5.7 приведены новые оценки координат, полученные на метрическом этапе первой итерации. Столбец 10 табл. 5.6 содержит новые оценки расстояний \hat{d}_{ij} , подсчитанные по формуле (5.31) из приведенных в табл. 5.7 оценок координат. На первой итерации значение стресса, формула 1, подсчитанное путем подстановки отклонений из столбца 8 и оценок расстояний из столбца 10 табл. 5.6 в формулу (5.28), S_1 равно 0,023.

Таблица 57 Оценки координат, полученные при первой итерации для шкал каталога предпочтения профессий

	Координата	
	I	II
Реалистичная	-0,089	0,162
Исследовательская	-0,180	0,037
Художественная	-0,071	-0,175
Гуманитарная	0,053	-0,100
Предпринимательская	0,141	-0,009
Традиционная	0,148	0,093

После стандартизации новых оценок координат и расстояний начнется следующая итерация. Итерация будет продолжаться до тех пор, пока улучшение стресса от одной итерации к следующей не станет меньше какого-либо небольшого числа, такого, как 0,001.

Альтернативный неметрический этап

После выхода в свет статьи Р. Шепарда [Shepard, 1962], посвященной неметрическому многомерному шкалированию, многие авторы стали предлагать различные неметрические алгоритмы [Guttman, 1968; Johnson, 1973; Kruskal, 1964; Takane et al., 1977]. Основные алгоритмы содержат шаги, изображенные на рис. 5.9, но выполняются эти шаги по-разному. Нам не хватит места для описания всех вариантов основных шагов. Мы рассмотрим здесь играющий очень важную роль в многомерном шкалировании неметрический этап, предложенный Л. Гуттманом [Guttman, 1968] и включенный в программы SSA (минимальный пространственный анализ) [Lingoes, 1973]; он является альтернативой описанному выше неметрическому этапу Краскала [Kruskal, 1964]. Как и на неметрическом этапе Краскала [Kruskal, 1964], на неметрическом этапе Гуттмана [Guttman, 1968] для подсчета новых отклонений используются исходные данные и текущие оценки расстояний, но проводятся эти вычисления иначе.

На неметрическом этапе Гуттмана [Guttman, 1968] каждое отклонение устанавливается равным одной из текущих оценок расстояний. А именно если пара стимулов (i, j) соответствует r -му по величине различию δ_{ij} , то соответствующее отклонение $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ устанавливается равным r -му по величине расстоянию, т. е. если пара стимулов (i, j) соответствует наименьшему различию δ_{ij} , то $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ устанавливается равным наименьшей оценке расстояния. Если пара стимулов (i, j) соответствует второму по величине различию δ_{ij} , то $\widehat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ устанавливается равным второй по величине оценке расстояния. Если пара стимулов (i, j) соответствует третьему по величине различию, то соответ-

ствующее отклонение устанавливается равным третьей по величине оценке расстояния и т.д., пока мы не дойдем до пары стимулов (i, j), соответствующей самому большому различию. Это последнее отклонение устанавливается равным самому большому расстоянию.

Для иллюстрации метода Гуттмана снова обращаемся к данным табл. 5.6. Столбец 3 содержит данные о различии δ_{ij} , а столбец 4 — текущие оценки расстояний \hat{d}_{ij}^0 , из которых на первой итерации рассчитываются отклонения. Наименьшее значение данных в столбце 3 соответствует паре стимулов (Т, П): $\delta_{ТП} = 0,57$. Самое маленькое расстояние в столбце 4 равно 0,100, так что на первой итерации $\hat{\delta}_{ТП}$ будет равно 0,100.

Второе по величине различие в столбце 3 соответствует паре стимулов (П, Г). Вторая по величине оценка расстояния в столбце 4 равна 0,130, так что $\hat{\delta}_{ПГ}$ будет равно 0,130. Третье по величине различие в столбце 3 соответствует паре стимулов (И, Р). Третья по величине оценка расстояния в столбце 4 равна 0,146, так что отклонение $\delta_{ИР}$ будет на первой итерации равно 0,146 и т.д., пока мы не дойдем до самого большого различия в столбце 3, соответствующего паре стимулов (Т, Х). Самая большая оценка расстояния в столбце 4 равна 0,347, так что $\hat{\delta}_{ТХ}$ будет равно 0,347.

Еще один способ описать неметрический этап Гуттмана следующий. Представьте себе, что оценки расстояний в столбце 4 табл. 5.6 представлены в порядке возрастания. После этой перестановки столбец 4 будет выглядеть так: 0,100, 0,130, 0,146, 0,158, 0,215, 0,232, 0,246, 0,267, 0,273, 0,287, 0,298, 0,324, 0,332, 0,337, 0,347. Эти переставленные оценки расстояний и составят отклонения, рассчитанные на первой итерации.

Неметрические этапы Гуттмана [Guttman, 1968] и Краскала [Kruskal, 1964] в некотором отношении похожи. В обоих случаях для подсчета новых отклонений $\hat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ берутся исходные данные δ_{ij} и текущие оценки расстояний \hat{d}_{ij}^c . Отличаются они, однако, тем, как в этих вычислениях используются оценки расстояний. На неметрическом этапе Краскала каждое отклонение $\hat{\delta}_{ij}^{(c+1)}$ устанавливается равным соответствующей оценке расстояния \hat{d}_{ij}^c или среднему арифметическому нескольких оценок расстояния. У Гуттмана отклонение для пары стимулов (i, j), соответствующей r -му по величине отклонению, устанавливается равным r -й по величине оценке расстояний. В работах [Guttman, 1968] и [Lingoes and Roskam, 1973] этот альтернативный неметрический этап описан более подробно.

ВЫВОДЫ

Р. Шепард [Shepard, 1962] предложил первый алгоритм неметрического многомерного шкалирования. *Алгоритмом неметрического многомерного шкалирования* называется любой алгоритм оценки координат стимулов при предположении, что данные связаны с расстоянием в пространстве некоторой неизвестной монотонной функцией f . Алгоритмы неметрического многомерного шкалирования позволяют вычислить оценки координат стимулов $\hat{x}_{i,k}$ в пространстве фиксированной размерности K таким образом, что ранговый порядок вычисленных из этих оценок координат расстояний \hat{d}_{ij} максимально возможно согласован с ранговым порядком исходных данных.

Вскоре после предложения Шепарда последовала работа Краскала [Kruskal, 1964] с описанием другого метода оценки координат стимулов по данным, монотонно связанным с расстояниями. Она положила начало разработкам ряда программ неметрического многомерного шкалирования для ЭВМ. Каждый алгоритм предназначен для построения оценок координат и отклонений, минимизирующих какую-либо меру соответствия между оценками расстояний и отклонениями, при условии, что отклонения и данные монотонно связаны. Среди этих программ — сравниваемые в [Schiffman et al., 1981] программы ALSCAL [Young and Lewyckij, 1979], SSA [Lingoes, 1973] и TORSCA [Young and Torgerson, 1967]. Среди мер соответствия — стресс, формулы 1 и 2, S-стресс, формулы 1 и 2, и коэффициент отчуждения.

Как и в метрическом шкалировании, следует решать вопросы о размерности, повороте конфигурации и интерпретации полученного решения. Размерности можно выбрать, получив шкалы в нескольких размерностях и отобрав среди них одну на основе интерпретируемости, воспроизводимости и соответствия. При выборе размерности может быть полезен график зависимости меры соответствия от размерности. За исключением случаев, когда решение одномерно или в данных содержится большое количество ошибок, решение со значением стресса, которое больше, чем 0,10, следует отвергнуть; кроме того, редко необходимо увеличивать размерность, чтобы сделать стресс меньше, чем 0,05. Конфигурации, имеющие форму S или U в размерности 2, указывают (но не обязательно) на то, что пространство стимулов одномерно.

Неевклидовы решения поворачивать не следует, так как при этом уменьшается соответствие оценок расстояний данным. В приложениях типа «верификация конфигурации» и «сжатие данных» в размерностях 1 и 2 важные характеристики стимулов будут очевидны и без поворота. В координатных приложениях, а также в размерностях 3 и больше для интерпретации поворот может быть необходим. Можно использовать объективный или ручной поворот. Интерпретация состоит из идентификации важных упорядочений и группировок стимулов. Диаграммы Шепарда обеспечивают зрительное представление монотонной функ-

ции, связывающей исходные данные с отклонениями и оценками расстояний.

При применении алгоритмов неметрического многомерного шкалирования возникают три проблемы: локальный минимум, вырожденность и отсутствие сходимости. Для уменьшения вероятности локального минимума можно применять рациональную стартовую конфигурацию. В некоторых случаях прибегают к нескольким стартовым конфигурациям. Полностью вырожденные решения легко выявляются и часто имеют близкое к нулю значение стресса. При обнаружении вырожденного решения можно применить к данным какой-либо метрический анализ. Отсутствия сходимости можно избежать, увеличив допустимое число итераций.

В одном из двух приведенных в этой главе примеров неметрическое многомерное шкалирование применялось к корреляциям шкал из каталога предпочтения профессий [Holland, 1965] в выборке из 1234 человек. Согласно теории карьер Холланда [Holland, 1973] стимулы образовали примерно шестиугольную конфигурацию в размерности 2. Во втором примере многомерное шкалирование применялось к матрице смещения фонем согласных. На двумерной конфигурации фонемы группировались по следующим характеристикам: являются ли они взрывными или фрикативными, носовыми, звонкими и в зависимости от того, какой частью рта они произносятся, — переднеязычными, среднеязычными, заднеязычными.

Описана схема неметрического алгоритма. Как и все подобные алгоритмы, она содержит три этапа: первоначальный, на котором определяется стартовая конфигурация, неметрический, на котором оцениваются отклонения, и метрический, на котором оцениваются координаты стимулов. Первоначальная стадия выполняется один раз. После этого алгоритм проходит ряд итераций. Каждая из них содержит один неметрический этап и один метрический. Итерации продолжаются до тех пор, пока изменение меры соответствия от одной итерации к другой не станет меньше какого-либо небольшого числа, такого, как 0,001.

ЗАДАЧИ

1. Представьте себе, что данные в табл. 5.8 получены из эксперимента, в котором детям показывают буквы-стимулы и просят их назвать. Каждый из элементов таблицы — число случаев, когда была предъявлена буква, соответствующая строке, а в ответе названа буква, соответствующая столбцу.

Проведите неметрическое шкалирование этих данных в размерностях 1 и 2. Если возможно, используйте поворот решения к главным осям, первый подход к обработке связей, рациональную стартовую конфигурацию и евклидово расстояние

а) Какова матрица координат стимулов \hat{X} в размерности 1? Опишите интересные особенности этого решения.

б) Нарисуйте двумерную конфигурацию и укажите существенные характеристики группировок стимулов такими же способами, как на рис. 5.8.

Таблица 58 Данные о смещении букв

	b	d	p	q	g	m	n	v	w
b	—								
d	23	—							
p	15	5	—						
q	5	10	16	—					
g	5	10	15	21	—				
m	2	0	1	1	2	—			
n	1	1	0	2	2	21	—		
v	1	0	1	1	2	5	15	—	
w	0	1	0	1	3	15	5	32	—

в) Проинтерпретируйте существенные группы стимулов. Какие характеристики букв могут быть причиной более частого их смещения в ответах детей?

2. Предположим, что при изучении поведения животных исследователь измерял частоту, с которой каждая пара животных вычесывала друг друга, а матрица данных в табл. 5.9 содержит меру относительной частоты для каждой пары животных. Большее значение данных означает более частое вычесывание. Гипотеза исследователя в том, что структура группы животных по своей сути является одномерной иерархической структурой, и по этой координате животные расположены в алфавитном порядке.

Таблица 59 Данные о вычесывании животных

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A										
B	20,25									
C	16,00	20,25								
D	12,25	16,00	20,25							
E	9,00	12,25	16,00	20,25						
F	6,25	9,00	12,25	16,00	20,25					
G	4,00	6,25	9,00	12,25	16,00	20,25				
H	2,25	4,00	6,25	9,00	12,25	16,00	20,25			
I	1,00	2,25	4,00	6,25	9,00	12,25	16,00	20,25		
J	0,25	1,00	2,25	4,00	6,25	9,00	12,25	16,00	20,25	

Проведите неметрическое шкалирование этих данных в размерностях 1 и 2. Если возможно, используйте поворот решения к главным осям, первый подход к обработке связей, рациональную стартовую конфигурацию и евклидово расстояние.

а) Начертите двумерное решение. Опишите существенные черты этой конфигурации.

б) После анализа значений стресса в размерностях 1 и 2 что вы думаете о том, сколько координат следует сохранить в окончательном решении? Почему?

в) Подтверждает ли окончательное решение гипотезу исследования? Объясните ваш ответ.

ОТВЕТЫ

Следующие результаты получены с применением программы KYST [Kruskal et al., 1973]. Те, кто при решении задач 1 и 2 использует другие алгоритмы неметрического шкалирования, должны получить похожие, но не идентичные результаты. Иными словами, читатель не должен ожидать полного совпадения своих результатов с приведенными ответами, как это было в гл 1 — 4.

1. а) $\widehat{X}' = (-0,90, -0,89, -0,90, -0,90, -0,87, 1,13, 1,12, 1,11, 1,12)$. Это одномерное решение вырождено, и поэтому его следует отвергнуть. Первые пять стимулов, буквы b, d, p, q и g, стянуты к одной точке, а четыре оставшихся стимула, m, n, v и w — ко второй. Как часто бывает в вырожденных решениях, значение стресса очень мало, $S = 0,05^*$

б) См. рис. 5.10.

в) Есть два больших кластера, каждый из которых разбивается на два меньших. Первый большой кластер содержит пять букв, состоящих из вертикальной линии и петли: {b, d, g, q, p}. Этот большой кластер разбивается на два: один, в котором вертикальная линия идет от петли вниз {g, q, p}, и второй, в котором вертикальная линия идет от петли вверх {b, d}. Второй основной кластер состоит из четырех букв, составленных из «дуг» и «перевернутых дуг» {m, n, v, w}. Он разбивается на буквы из «дуг» {m, n} и буквы из перевернутых дуг {v, w}**.

* Аналогичные решения получают при применении алгоритма Джонсона, реализованного в приложенной к книге программе PARSUN с различными стартовыми конфигурациями. Приведем конфигурацию с наименьшим значением θ ($\theta = 0,00077$), полученную при исходной конфигурации Краскала:

$\widehat{X}' = (-0,56, -0,56, -0,56, -0,56, -0,45, 1,37, 1,37, 1,37, 1,57)$. И здесь первые стимулы b, d, p, q и g очень близки, хотя g несколько отстоит от остальных, а вторая группа — m, n, v, w. — Примеч. чеп

** Применение к этим данным алгоритма Джонсона с различными стартовыми конфигурациями приводит к конфигурациям, на которых два больших кластера те же, а малые кластеры другие. Это еще раз подтверждает то, что конфигурация, полученная при шкалировании, отражает большие значения различий и совершенно нерегулярна по отношению к локальному расположению точек

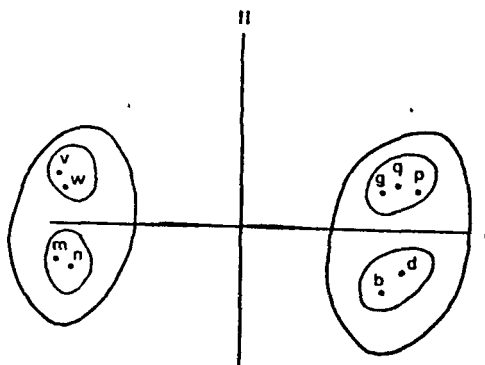


Рис 5.10 Двумерная конфигурация координат стимулов для данных о смещении стимулов в задаче 2

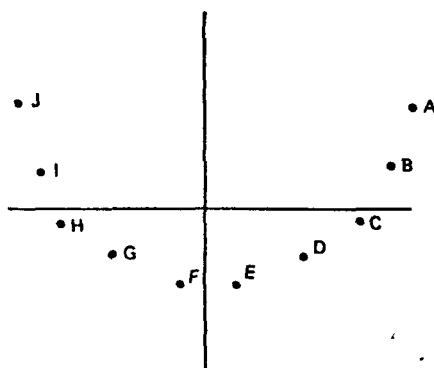


Рис. 5.11. Двумерная конфигурация для данных о вычесывании животных

2. а) Конфигурация на рис. 5.11 имеет U-образную форму, что характеризует одномерность набора стимулов. Начиная с первого верхнего угла рис. 5.11 и двигаясь по часовой стрелке, мы пройдем все стимулы вдоль U в алфавитном порядке *

б) Все указывает на то, что следует оставить одну координатную ось. В размерности 1 соответствие полное**, $S=0,00$. Более того, в размерности 2 стимулы расположены в U-образной форме, что характеризует одномерность набора стимулов.

в) Многомерное шкалирование подтверждает гипотезу исследователя. Прежде всего, как говорилось в ответе 2б), все указывает на одномерность конфигурации. Поскольку стимулы в одномерном решении и вдоль U-образной кривой расположены в алфавитном порядке, данные согласованы с гипотезой исследователя об упорядочении животных. Координаты для одномерного решения следующие:

$$\hat{X}' = \begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} & \text{F} & \text{G} & \text{H} & \text{I} & \text{J} \\ \text{X}' = & [1,44 & 1,26 & 0,99 & 0,57 & 0,18 & -0,18 & -0,57 & -0,99 & -1,26 & -1,44] \end{matrix}$$

[Kruskal, 1977] Однако применение того же алгоритма к подматрицам матрицы (5 8), соответствующим первым пяти буквам и последним четырем, приводит к конфигурации с такими же кластерами, как на рис. 5 10, — *Примеч. пер.*

* Применение к этим данным алгоритма Джонсона со стартовой конфигурацией Краскала позволяет получить в двумерном случае конфигурацию, полностью совпадающую с данными ($\theta = 0$). Точки расположены в алфавитном порядке вдоль синусоподобной кривой. Как и описанные расположения точек, такое расположение может означать, что данные одномерны. — *Примеч. пер.*

** Алгоритм Джонсона также дает в одномерном случае полное соответствие, $\theta = 0$. Стимулы расположены в алфавитном порядке. — *Примеч. пер.*

Первоначальная дистанционная модель Торгерсона [Torgerson, 1952] не допускает каких-либо индивидуальных различий в процессе оценок сходства. Так как индивидуальные различия часто представляют интерес, модель Торгерсона была расширена путем включения в основную модель субъективных параметров. Оценки субъективных параметров дают количественное координатное описание субъектов, аналогичное количественному координатному описанию стимулов, получаемому с помощью оценок координат стимулов.

Существуют два подхода к индивидуальным различиям. Первая модель, включающая в первоначальную модель Торгерсона [Torgerson, 1952] субъективные веса координатных осей, рассмотрена в [Bloхот, 1968; Carroll and Chang, 1970; Hogan, 1969]. Эта модель часто называется INDSCAL (индивидуальное шкалирование), так как ее обычно не отличают от программы INDSCAL [Carroll and Chang, 1970], предназначенной для оценки параметров данной модели. Чтобы избежать путаницы между моделью и программой ее подгонки, мы будем называть эту модель взвешенной евклидовой моделью.

Второй подход называется трехмодельной моделью многомерного шкалирования [Tucker, 1972]. В различных работах по психофизике [Krantz and Tversky, 1975; Krumhansl, 1979; Wiener—Ehrlich, 1978] сообщалось о взаимодействиях между координатными осями, не предсказанных основной моделью евклидова расстояния (1.5). Хотя взаимодействия координат в модели Такера [Tucker, 1972] могут быть и не такими, какие были обнаружены в психофизических исследованиях, эта модель тем не менее может объяснить некоторые виды взаимодействия координат. В модели Такера предполагается, что субъекты различаются представленными в их оценках весами координат и степенями взаимодействия между координатами.

Модели индивидуальных различий применялись вначале для изучения того, насколько отличаются оценки стимулов у разных людей, отсюда и название — «модели индивидуальных различий». Однако они могут применяться и для описания различий в структуре ситуаций, окружающей среды или условий лечения. Например, в [Naphtan, 1976] получено несколько наборов мер сходства всех возможных пар элементов городской среды в течение дня. Затем параметры индивидуальных различий — в данном случае это параметры времени — служили для описания различий в структуре города в разные моменты времени.

С помощью модели многомерного шкалирования индивидуальных различий в [Naphtan, 1976] получены более динамичные характеристики городской среды, чем это можно было бы сделать методами, рассмотренными в гл. 4 и 5.

Эта глава начнется с обсуждения взвешенной евклидовой модели и закончится обсуждением трехмодальной модели. Так как взвешенная евклидова модель применялась более широко и программы для ее подгонки более доступны, она будет рассмотрена подробно.

ВЗВЕШЕННАЯ ЕВКЛИДОВА МОДЕЛЬ

Как и раньше, пусть X — матрица координат стимулов ($I \times K$). Эту матрицу будем называть групповой матрицей координат стимулов. В модели предполагается, что у каждого субъекта существует своя, индивидуальная матрица координат стимулов. Через X обозначим ($I \times K$)-матрицу координат стимулов для субъекта s с элементами x_{iks} . Здесь x_{iks} — k -я координата стимула i для субъекта s . Предполагается, что элементы каждой субъективной матрицы координат x_{iks} связаны с элементами групповой матрицы координат следующим образом:

$$x_{iks} = x_{ik} \omega_{ks}, \quad (6.1)$$

где ω_{ks} — неизвестный вес координаты k для субъекта s . Если W_s — диагональная матрица ($K \times K$) с элементами ω_{ks} , то (6.1) можно записать в матричных обозначениях так:

$$X_s = XW_s. \quad (6.2)$$

В соответствии с этой моделью данные субъектами оценки различий при отсутствии ошибок измерений и выборки равны обычным евклидовым расстояниям между стимулами, описанными их координатами в соответствующих субъективных пространствах:

$$\delta_{ijs} = \left[\sum_k (x_{iks} - x_{jks})^2 \right]^{1/2}. \quad (6.3)$$

В (6.3) δ_{ijs} — оценка различия пары стимулов (i, j), данная субъектом s . Подставляя в (6.3) вместо величин x_{iks} и x_{jks} правую часть (6.1), получим:

$$\delta_{ijs} = \left[\sum_k \omega_{ks}^2 (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}. \quad (6.4)$$

Формула (6.4) — это предположение, на котором основана взвешенная евклидова модель.

Веса ω_{ks} иногда называются весами важности или весами характеристик. Если все прочие величины равны, то при увеличении ω_{ks} разность между стимулами по координате k вносит все больший и больший вклад в оцененное различие между стимулами i и j . На рис. 6.1 наглядно показано, как взвешивание координат влияет на конфигура-

цию стимулов. В верхней трети рисунка представлено групповое пространство стимулов, в котором девять стимулов расположены в виде квадрата с центром в начале координат. Матрица X — это матричное представление группового пространства.

В средней трети рис. 6.1 показано субъективное пространство для субъекта, у которого вес координаты I, $w_{11} = 1,5$, в два раза больше веса координаты II, $w_{21} = 0,75$. Эти два веса являются диагональными элементами изображенной на рис. 6.1 диагональной матрицы весов W_1 . Матрица субъективных координат X_1 была получена умножением групповой матрицы координат стимулов X на матрицу субъективных весов W_1 : $X_1 = XW_1$. Умножение X на диагональную матрицу, какой и является W_1 , просто изменяет масштабы столбцов X , т. е. каждый элемент столбца 1 матрицы X_1 получается умножением соответствующего элемента X на 1,50, а каждый элемент столбца 2 X_1 получается умножением соответствующих элементов X на 0,75. Действие таких субъективных взвешиваний привело к преобразованию квадратной формы в верхней части рис. 6.1 в прямоугольную форму в средней части рисунка.

Третий чертеж на рис. 6.1 изображает индивидуальное пространство стимулов, в котором вес координаты II, $w_{22} = 2,00$, в четыре раза больше веса координаты I, $w_{12} = 0,50$. Для получения изображенной на рис. 6.1 индивидуальной матрицы координат стимулов X_2 матрица этих весов W_2 умножается слева на групповую матрицу координат X . Умножение X на диагональную матрицу W_2 просто изменяет масштабы столбцов X , т. е. каждый элемент столбца 1 матрицы X_2 получается умножением соответствующего элемента X на 0,50; каждый элемент столбца 2 матрицы X_2 получается умножением соответствующего элемента X на 2,00.

Для подгонки взвешенной евклидовой модели есть по крайней мере три широко распространенные программы для ЭВМ. Первая из них INDSCAL [Carroll and Chang, 1970]. Вторая, очень похожая, но в вычислительном отношении более эффективная, — SINDSCAL [Pruzansky, 1975]. Программа ALSCAL [Young and Lewyckyj, 1979] может применяться для подгонки взвешенной евклидовой модели.

Размерность, поворот и интерпретация

Входная информация для любой из упомянутых выше программ обычно включает несколько матриц сходства или различия, по одной для каждого субъекта. В табл. 6.1 приведены три матрицы различий для трех субъектов. Однако если исследовать, как меняется структура стимулов не для разных индивидов, а для разных ситуаций, окружающей среды или условий лечения, то это будут матрицы различий для ситуаций, окружающей среды или условий лечения.

Данные табл. 6.1 будут использоваться в последующем обсуждении для разъяснения вопросов размерности, поворота и интерпретации

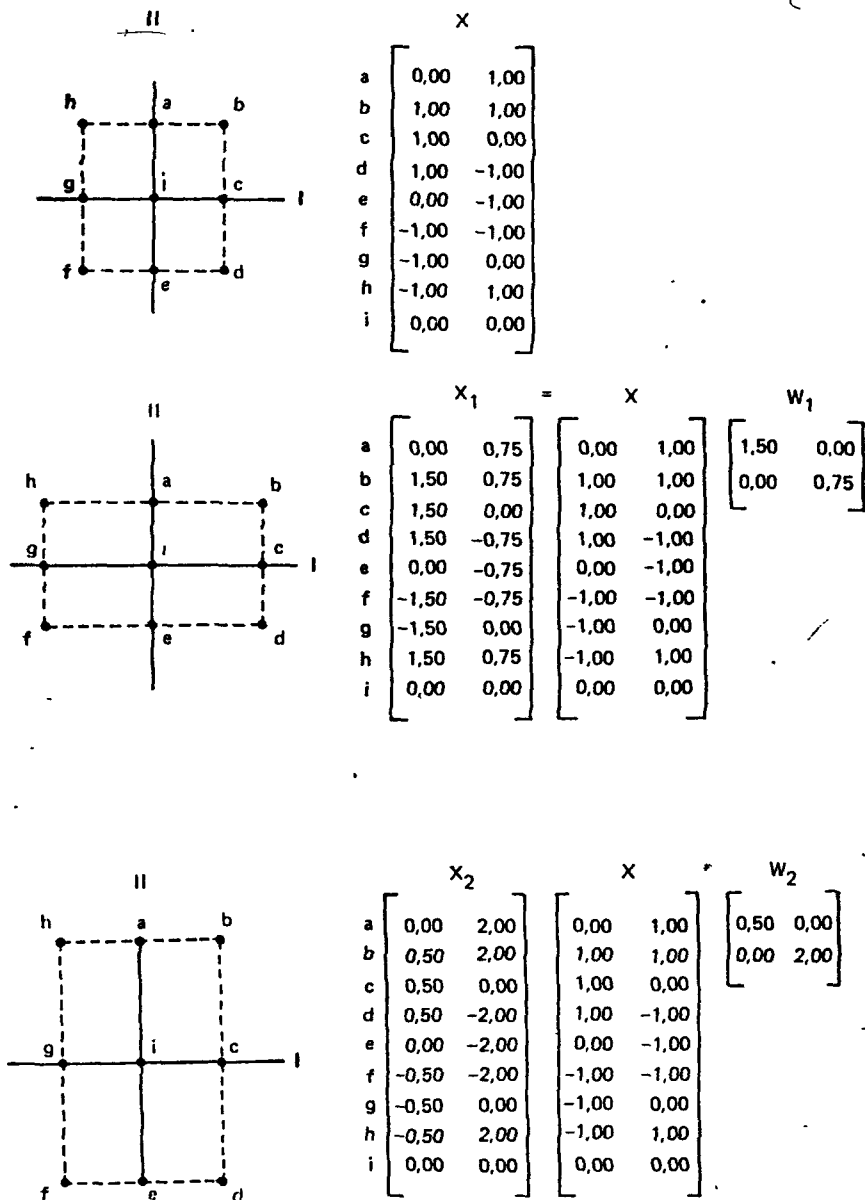


Рис. 6.1. Групповое пространство стимулов и два субъективных пространства для девяти гипотетических стимулов

Таблица 6.1. Нижние треугольники матриц различия для трех субъектов и девяти стимулов-прямоугольников

Субъект 1

Прямо- угольник	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a									
b	1,00								
c	1,41	1,00							
d	2,24	2,00	1,00						
e	2,00	2,24	1,41	1,00					
f	2,24	2,83	2,24	2,00	1,00				
g	1,41	2,24	2,00	2,24	1,41	1,00			
h	1,00	2,00	2,24	2,83	2,24	2,00	1,00		
i	1,00	1,41	1,00	1,41	1,00	1,41	1,00	1,41	

Субъект 2

Прямо- угольник	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a									
b	1,50								
c	1,68	0,75							
d	2,12	1,50	0,75						
e	1,50	2,12	1,68	1,50					
f	2,12	3,35	3,09	3,00	1,50				
g	1,68	3,09	3,00	3,09	1,68	0,75			
h	1,50	3,00	3,09	3,35	2,12	1,50	0,75		
i	0,75	1,68	1,50	1,68	0,75	1,68	1,50	1,68	

Субъект 3

Прямо- угольник	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a									
b	0,50								
c	2,06	2,00							
d	4,03	4,00	2,00						
e	4,00	4,03	2,06	0,50					
f	4,03	4,12	2,24	1,00	0,50				
g	2,06	2,24	1,00	2,24	2,06	2,00			
h	0,50	1,00	2,24	4,12	4,03	4,00	2,00		
i	2,00	2,06	0,50	2,06	2,00	2,06	0,50	2,06	

конфигурации. Это гипотетические данные о различии девяти прямоугольников, меняющихся по высоте и ширине. В табл. 6.2 приведены высота и ширина каждого стимула. Имеются три значения высоты — 1 дюйм, 2 дюйма и 3 дюйма; те же три значения у ширины. Комбинируя каждое из значений высоты с каждым из значений ширины, получим девять стимулов-прямоугольников. Предположим, что каждый из трех субъектов оценивает различия всех возможных прямоугольников. Эти данные содержатся в табл. 6.1. Наше гипотетическое исследование аналогично исследованиям, описанным в [Krantz and Tversky, 1975; Wiener — Ehrlich, 1978].

Таблица 6.2. Высота, ширина и значения двумерной шкалы для девяти стимулов-прямоугольников

Прямоугольник	Высота (дюймы)	Ширина (дюймы)	Координата I	Координата II
<i>a</i>	2,00	3,00	0,00	0,41
<i>b</i>	3,00	3,00	0,41	0,41
<i>c</i>	3,00	2,00	0,41	0,00
<i>d</i>	3,00	1,00	0,41	-0,41
<i>e</i>	2,00	1,00	0,00	-0,41
<i>f</i>	1,00	1,00	-0,41	-0,41
<i>g</i>	1,00	2,00	-0,41	0,00
<i>h</i>	1,00	3,00	-0,41	0,41
<i>i</i>	2,00	2,00	0,00	0,00

Выходная информация программы, основанной на взвешенной евклидовой модели, состоит из следующих главных элементов. Первый — матрица \widehat{X} ($I \times K$) — оценка групповой матрицы стимулов. Второй — матрица \widehat{W} ($K \times S$) с элементами $\widehat{w}_{k,s}$ — оценками субъективных весов. Элементы в столбце *s* матрицы \widehat{W} — это диагональные элементы матрицы \widehat{W}_s ($K \times K$). Говорят, что матрица \widehat{W} определяет пространство субъектов, а каждая строка \widehat{W} представляет одну координатную ось указанного пространства. Координаты $w_{k,s}$ субъектов в этом пространстве по оси *k* — веса оси *k* у различных субъектов.

Отметим, что выходная информация не включает матрицы координат стимулов для каждого из субъектов \widehat{X}_s . Вместо этого включается групповая матрица координат стимулов \widehat{X} с элементами $x_{i,k}$ и матрица координат субъектов \widehat{W} с элементами $w_{k,s}$. Координаты в каждой из индивидуальных матриц координат стимулов \widehat{X} могут быть восстановлены по элементам \widehat{X} и \widehat{W} с помощью формулы (6.1). Интерпретация решения при применении модели индивидуальных различий — сложная задача, так как интерпретировать надо и групповое пространство

стимулов, представленное матрицей \widehat{X} , и пространство субъектов, представленное матрицей \widehat{W} .

Третий главный элемент выходной информации — мера соответствия, которая применяется при принятии решения о размерности. К обсуждению этого вопроса мы и переходим.

Размерность

Если размерность неизвестна, то пользователь должен получить решения в различных размерностях и выбрать одно из них на основе соответствия данным, интерпретируемости и воспроизводимости. Разумный способ — получить априорную оценку размерности K^* , найти решения во всех размерностях от $(K^* - 3)$ до $(K^* + 3)$ и выбрать из этих семи решений. Если $K^* \leq 3$, то нужно найти решения в размерностях от 1 до $(K^* + 3)$. При выборе одного из этих решений может быть полезен график зависимости меры соответствия от размерности. Если на графике имеется явный изгиб у размерности K , то K кажется подходящей размерностью.

При применении программы ALSCAL [Young and Lewycky, 1979] предпочитаемой мерой является вариант S-стресса, формула 1, (5.16), адаптированный к ситуации, в которой надо анализировать не одну матрицу данных, а несколько, по одной для каждого субъекта.

$$SS_1 = \left[\frac{1}{S} \sum_s \frac{\sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{i/s}^2 - \widehat{d}_{i/s}^2)}{\sum_{(i,j)} (\widehat{d}_{i/s}^2)^2} \right]^{1/2}. \quad (6.5)$$

Соответствующая мера может быть записана для каждого субъекта:

$$SS_1 = \left[\frac{\sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{i/s}^2 - \widehat{d}_{i/s}^2)^2}{\sum_{(i,j)} (\widehat{d}_{i/s}^2)^2} \right]. \quad (6.6)$$

В формулах (6.5) и (6.6) $\widehat{\delta}_{i/s}$ — оценка отклонения для пары стимулов (i, j) и субъекта s .

В программах INDSCAL [Carroll and Chang, 1970] и SINDSCAL [Pruzansky, 1975] статистикой соответствия является корреляция между скалярными произведениями и оцененными скалярными произведениями. До описания этой меры соответствия следует обсудить матрицы скалярных произведений, применяемые в программе INDSCAL. В начале анализа с использованием программы INDSCAL для каждого субъекта вычисляется матрица скалярных произведений $(I \times I)$; вычисление проводится путем возведения элементов в квадрат и двой-

ного центрирования всех субъективных матриц данных. Элементы матрицы скалярных произведений Δ_s^* для субъекта s вычисляются так ¹:

$$\delta_{ijs}^* = -\frac{1}{2} (\delta_{ijs}^2 - \delta_{i.s}^2 - \delta_{.js}^2 + \delta_{.s.s}^2). \quad (6.7)$$

В (6.7)

$$\delta_{i.s}^2 = \frac{1}{J} \sum_j \delta_{ijs}^2, \quad (6.8)$$

$$\delta_{.js}^2 = \frac{1}{I} \sum_i \delta_{ijs}^2, \quad (6.9)$$

$$\delta_{.s.s}^2 = \frac{1}{IJ} \sum_{(i,j)} \delta_{ijs}^2. \quad (6.10)$$

Формула (6.7) показывает, что элементы субъективных матриц различий сначала возводятся в квадрат, после чего к полученной матрице применяется двойное центрирование (см. [Torgerson, 1952] и формулу 4.3). Если данные о различии имеют вид (6.4), то скалярные произведения будут следующими:

$$\delta_{ijs}^* = \sum_k x_{ik} x_{jk} \omega_{ks}^2 = \sum_k x_{iks} x_{jhs}. \quad (6.11)$$

В матричной форме (6.11) может быть записано в виде

$$\Delta_s^* = X W_s^2 X'. \quad (6.12)$$

Здесь $W_s^2 = W_s W_s'$ — диагональная матрица, k -й диагональный элемент которой равен ω_{ks}^2 .

После того как найдены оценки координат стимулов \widehat{x}_{ik} и оценки субъективных весов $\widehat{\omega}_{ks}$, можно вычислить оцененные скалярные произведения, подставив оценки координат стимулов и субъективных весов в правую часть (6.11):

$$\widehat{\delta}_{ijs}^* = \sum_k \widehat{x}_{ik} \widehat{x}_{jk} \widehat{\omega}_{ks}^2. \quad (6.13)$$

¹ Термины «различие» и «модель евклидова расстояния» иногда употребляются в ином значении, чем в данной главе. Предполагается, что различия при отсутствии ошибок будут иметь вид $\delta_{ijs} = d_{ijs} + c_s$, где c_s — аддитивная константа субъекта s . Под приближением данных евклидовыми расстояниями мы понимаем, что при отсутствии ошибок будет верно более жесткое условие: $\delta_{ijs} = d_{ijs}$. В нашем обсуждении предполагается, что данные о различии имеют именно этот вид. Если данные имеют вид $\delta_{ijs} = d_{ijs} + c_s$, то в большинстве алгоритмов для каждого из субъектов оценивают c_s , решая проблему аддитивных констант каким-либо способом (см. гл. 4). Затем эти оценки вычитаются из данных. В результате приходят к преобразованным значениям данных, имеющим подразумеваемый в этой главе вид $\delta_{ijs} = d_{ijs}$.

В матричном виде (6.13) можно записать как

$$\widehat{\Delta}_s = \widehat{X} \widehat{W}_s \widehat{X}' \quad (6.14)$$

Статистика соответствия, используемая в INDSCAL, — просто коэффициент корреляции между фактическими (δ_{ijs}^*) и оцененными ($\widehat{\delta}_{ijs}^*$) скалярными произведениями:

$$r = \frac{\sum_{(i,j,s)} (\delta_{ijs}^* - \delta_{...}^*) (\widehat{\delta}_{ijs}^* - \widehat{\delta}_{...}^*)}{[\sum_{(i,j,s)} (\delta_{ijs}^* - \delta_{...}^*)^2 \sum_{(i,j,s)} (\widehat{\delta}_{ijs}^* - \widehat{\delta}_{...}^*)^2]^{1/2}} \quad (6.15)$$

В (6.15) $\delta_{...}^*$ — общее среднее всех фактических скалярных произведений:

$$\delta_{...}^* = \frac{1}{IJS} \sum_{(i,j,s)} \delta_{ijs}^* \quad (6.16)$$

а $\widehat{\delta}_{...}^*$ — общее среднее оцененных скалярных произведений,

$$\widehat{\delta}_{...}^* = \frac{1}{IJS} \sum_{(i,j,s)} \widehat{\delta}_{ijs}^* \quad (6.17)$$

Мера соответствия также вычисляется для каждого субъекта. Это — корреляция между фактическими и оцененными скалярными произведениями субъекта:

$$r_s = \frac{\sum_{(i,j)} (\delta_{ijs}^* - \delta_{...s}^*) (\widehat{\delta}_{ijs}^* - \widehat{\delta}_{...s}^*)}{[\sum_{(i,j)} (\delta_{ijs}^* - \delta_{...s}^*)^2 \sum_{(i,j)} (\widehat{\delta}_{ijs}^* - \widehat{\delta}_{...s}^*)^2]^{1/2}} \quad (6.18)$$

В (6.18) $\delta_{...s}^*$ и $\widehat{\delta}_{...s}^*$ — среднее фактических и оцененных скалярных произведений для субъекта s . В отличие от мер несоответствия — стресса и S-стресса, которые уменьшаются при увеличении соответствия данным, — r — мера соответствия, которая увеличивается при увеличении соответствия данным.

На рис. 6.2 показана мера соответствия r , полученная при применении к данным о различии из табл. 6.1 программы SINDSCAL [Pruzansky, 1975] в размерностях 1—5. На этом чертеже есть отчетливый изгиб при $K = 2$, поэтому предполагаем, что 2 — разумное число координатных осей, на котором следует остановиться. Для большинства реальных данных изгиб существенно менее ясен, по-

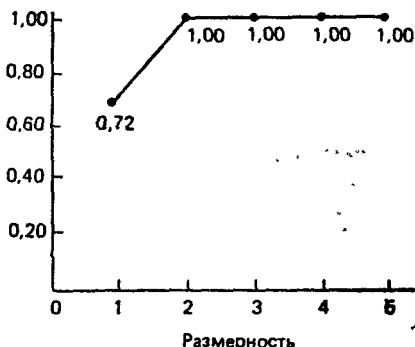


Рис. 6.2. Корреляция между фактическими и оцененными скалярными произведениями в размерностях 1—5 для данных о различии прямоугольников

этому одной только меры соответствия для принятия решения о размерности недостаточно. Для трех субъектов (см. табл. 6.1) двумерные статистики соответствия равны друг другу и максимальны $r_1 = r_2 = r_3 = 1,00$, т. е. данные всех субъектов полностью соответствуют конфигурации.

Поворот

Конфигурация, соответствующая взвешенной евклидовой модели, не может быть повернута. Исключения составляют отдельные ситуации, описанные в [Mac Callum, 1974 b; Pruzansky, 1975]¹. В общем случае, если \widehat{X} — решение, то $\widehat{X}^* = \widehat{X}T$ не будет решением². Поскольку чаще всего неповернутые оси в размерности K сами по себе должны быть интерпретируемым поворотом координат, проблема поворота практически исчезает. Это очень облегчает интерпретацию решения в размерностях выше двух. Популярность взвешенной евклидовой модели объясняется отчасти тем, что решения, получаемые с ее помощью, интерпретировать легче, чем решения по методам, требующим вращения полученной конфигурации.

Интерпретация

Интерпретация стимульного координатного пространства состоит в идентификации важных группировок и упорядочений стимулов. Так как поворачивать оси в общем случае нельзя, осмысленные упорядочения должны соответствовать упорядочениям стимулов по координатным осям. В столбцах 4 и 5 табл. 6.2 приведены оценки координат для примера из табл. 6.1, полученные с помощью программы SINDSCAL. Корреляция между высотой прямоугольников в столбце 2 и осью координат I в столбце 4 равна 1,00. Упорядочение стимулов по высоте полностью соответствует их упорядочению по оси I. Аналогично упорядочение переменных по ширине совпадает с их упорядочением по оси II.

¹ Как указано в этих работах, при некоторых исключительных обстоятельствах взвешенное евклидово решение может быть повернуто. Рассмотрим следующую нормализованную сумму произведений для осей k и k' :

$$SP_{kk'} = \frac{\sum_s \widehat{w}_{ks} \widehat{w}_{k's}}{(\sum_s \widehat{w}_{ks}^2)^{1/2} (\sum_s \widehat{w}_{k's}^2)^{1/2}}$$

Эта величина приближается к 1,00, когда субъективные веса координаты k почти, с практической точки зрения, пропорциональны весам оси k' . В таких случаях оси k и k' могут быть повернуты на образуемой ими плоскости без уменьшения меры соответствия.

² В общем случае $\widehat{X}^* = \widehat{X}T$ будет решением, только если T содержит один ненулевой элемент в каждой строке и столбце и каждый ненулевой элемент равен 1,0 или $-1,00$.

Корреляция между шириной в столбце 3 и осью II в столбце 5 равна 1,00. Признаки «высота» и «ширина» обеспечивают очевидную интерпретацию координат стимулов.

Пространство субъектов также требует интерпретации. Субъективные веса не должны быть отрицательными. Отрицательные веса означают нарушения предположений о том, что расстояние евклидово. Для интерпретации субъективных весов полезными оказываются векторы, идущие из начала координат в точку, представляющую субъекта, такие, как изображены на рис. 6.3.

Длина каждого вектора приблизительно представляет степень соответствия данных этого субъекта конфигурации, хотя субъективная статистика r_s — лучший индекс соответствия, чем эта длина. На рис. 6.3 все три вектора имеют одинаковую длину, что и следовало ожидать в случае, когда данные, полученные от всех трех субъектов, подогнаны одинаково хорошо.

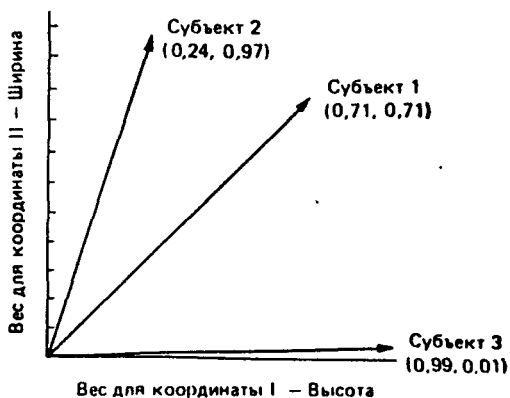


Рис. 6.3. Веса координат для трех субъектов, оценивающих девять прямоугольников

Направление каждого вектора обозначает относительные веса координат. Даже если длины двух векторов не равны, т. е. если у них одно и то же направление из начала координат, то они представляют одинаковые относительные веса координат. Для субъекта 1 (см. рис. 6.3) с весами $\hat{w}_{11} = \hat{w}_{21} = 0,71$ обе координатные оси вносят равноценный вклад в оценки. Для субъекта 2 ось ширины, $\hat{w}_{1,2} = 0,97$, влияет в три раза сильнее, чем ось высоты $\hat{w}_{2,2} = 0,24$. Оценки субъекта 3 можно объяснить исключительно осью высоты; $\hat{w}_{1,3} = 0,99$, а $\hat{w}_{2,3} = 0,01$.

В [Young and Lewyckuj, 1979] утверждается, что относительные веса координат, определенные по формуле

$$\omega_{ks}^* = \frac{w_{ks}}{[\sum_k w_{ks}^2]^{1/2}}, \quad (6.19)$$

более важны, чем первоначальные веса w_{ks} . Знаменатель правой части (6.19) — длина вектора для субъекта s . Деление на эту длину снимает влияние того, что соответствие конфигурации данных у разных субъектов не одинаково и обеспечивает относительную меру веса координаты.

Локальные минимумы и отсутствие сходимости

Основные алгоритмы подгонки взвешенной евклидовой модели являются итерационными, поэтому при их применении возникают проблемы локальных минимумов и сходимости, описанные в гл. 5. Для каждого алгоритма существует набор уравнений, которым должны удовлетворять оценки координат стимулов и субъективных весов. Для разных алгоритмов эти уравнения могут быть различными. Такие уравнения называются уравнениями решения. В общем случае, однако, есть различные наборы оценок координат стимулов и субъективных весов, удовлетворяющие уравнениям решения. Подобные наборы оценок не будут в одинаковой степени соответствовать данным. Тот из наборов параметров, который дает наибольшее соответствие конфигурации данным, представляет глобальный минимум меры несоответствия. Все другие наборы — локальные минимумы этой меры. Проблема локальных минимумов состоит в том, чтобы найти набор параметров, который представляет глобальный минимум. Лучший способ избежать локального минимума — применение рациональной стартовой конфигурации. Метод получения рациональной стартовой конфигурации объяснен при обсуждении формулы (6.23).

Проблема сходимости обусловлена тем, что пользователь часто должен устанавливать максимальное число разрешенных итераций. За это число итераций алгоритм может и не обеспечить желаемого решения. Если решение не сошлось, то рядом с мерой соответствия печатается сообщение типа «максимальное число итераций достигнуто». Это предусмотрено в большинстве программ. Пользователю следует внимательно анализировать напечатанные вместе с каждым решением сообщения, чтобы убедиться в том, что алгоритм действительно сошелся за разрешенное число итераций. В противном случае число итераций можно увеличить и вновь искать решение.

ПРИМЕР

Многомерное шкалирование часто применяется для исследования характеристик, определяющих восприятие субъектами тех или иных людей [Davison and Jones, 1976; Forgas, 1979; Forgas et al., 1977; Isenberg and Ennis, 1980; Jones and Young, 1972; Nygren and Jones, 1977; Rosenberg and Jones, 1972; Rosenberg et al., 1968; Shikiar and Coates, 1978; Wish et al., 1976]. Взвешенная евклидова модель широко использовалась для изучения того, как члены каких-либо групп воспринимают друг друга.

В первом из подобных исследований [Jones and Young, 1972, p. 108] авторы с помощью взвешенной евклидовой модели проверяли гипотезы относительно характеристик межличностного восприятия, изменений в воспринимаемой социальной структуре, связи межличностного восприятия с межличностным поведением членов всей группы.

Изучалось 18 член факультетского подразделения: восемь сотрудников факультета, девять аспирантов и один постдокторант*. Эти 18 лиц были лицами-стимулами. Авторы сообщают о двух исследованиях, проведенных в 1969 и 1970 гг. Мы рассматриваем только результаты, полученные в 1970 г.

В 1970 г. 31 член факультетского подразделения оценивал сходство всех возможных пар стимулов. Из них было 14 аспирантов, 9 сотруд-

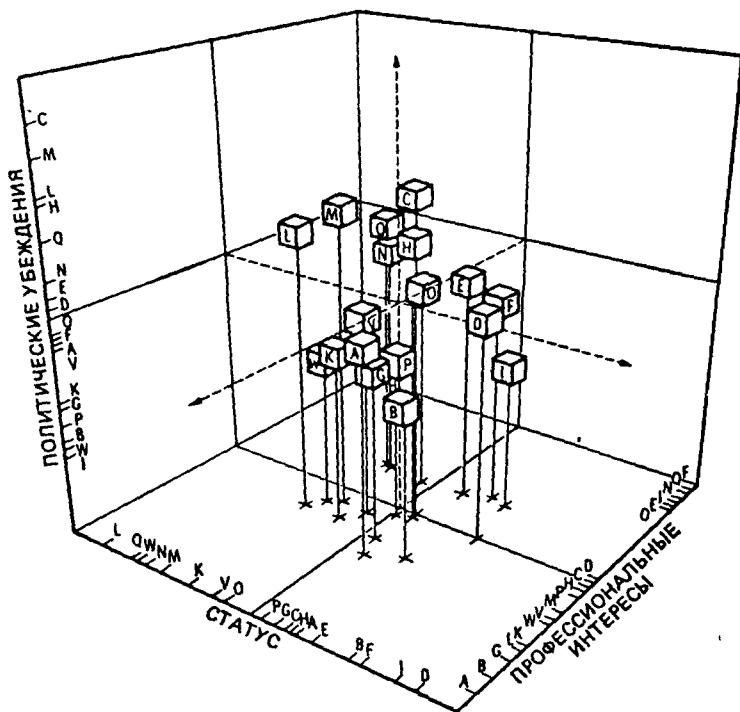


Рис. 6.4. Групповое пространство стимулов 1970 г. А—I обозначают сотрудников факультета и постдокторанта. Буквы К—Q, V, W обозначают аспирантов. Воспроизведено с разрешения автора и издателя

ников факультета, 1 постдокторант и 7 работников канцелярии, секретариата и технических сотрудников. Среди оценивающих были 18 лиц-стимулов. Анализировалась 31 матрица сходства, по одной для каждого субъекта; анализ проводился с помощью программы INDSCAL [Carroll and Chang, 1970]. На рис. 6.4. приведено трехмерное решение.

* Постдокторант — этап, следующий за защитой докторской диссертации.—
Примеч. пер.

Академический ранг каждого из субъектов был известен. Корреляция между мерой этого ранга и координатами по оси I равна 0,95. Сотрудники факультета и постдокторант, обозначенные на рис. 6.4 буквами А — I, представлены на положительном конце координатной оси I. Полные профессора и младшие профессора на этой оси расположены перед профессорами-ассистентами*. Аспиранты, обозначенные буквами К — Q, V и W, представлены на отрицательном конце оси. В [Jones and Young, 1972] ось I названа осью статуса.

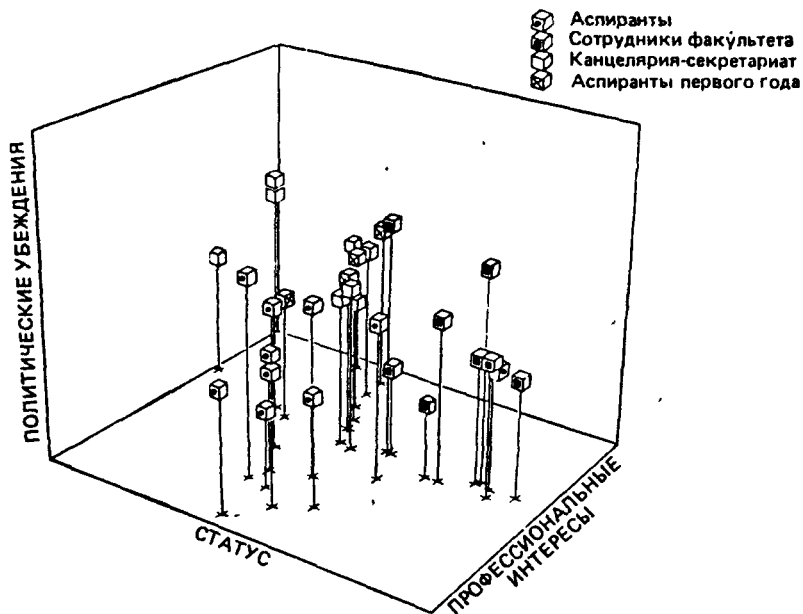


Рис. 6.5. Пространство индивидуальных различий для 30 субъектов. Воспроизведено с разрешения автора и издателя

Координатная ось II отражает политические убеждения лиц-стимулов. Мера политических убеждений каждого субъекта, индекс либерализм-консерватизм, коррелирует с координатами по оси II. Коэффициент корреляции равен 0,93. Мера исследовательских интересов субъектов коррелирует с оценками по оси III. Коэффициент корреляции равен 0,75. На положительном конце этой оси — статистики. Те, кто занимается психологическими проблемами, представлены на ее отрицательном конце. В [Jones and Young, 1972] эта координатная ось названа осью профессиональных интересов.

На рис. 6.5 приведено пространство субъективных весов для 30 (из 31) субъектов. Анализ субъективных весов показывает, что у сотруд-

* Полный профессор, младший профессор, профессор-ассистент — должности в учебных заведениях США. — Примеч. пер.

ников факультета в основном более высокие веса по оси статуса (ось I). В [Jones and Young, 1972] сделан вывод, что для сотрудников факультета статус важнее, чем для других. Для аспирантов, имеющих в среднем более высокие веса по оси III, профессиональные интересы оказываются более важными. Сотрудники секретариата и аспиранты первого года имеют самые высокие веса по оси политических убеждений (ось II).

В [Jones and Young, 1972, p. 119] отмечено, что лица-стимулы склонны к более частому взаимодействию с теми, кто находится рядом с ними в пространстве стимулов. Авторы указанной работы делают вывод, что все результаты исследования подтверждают предполагавшуюся связь между межличностным восприятием и межличностным поведением. Свое трехмерное решение они считают представлением структуры группового восприятия, так как оно было получено на основе субъективного восприятия лиц-стимулов, отраженного в оценках сходства, а не на основе поведенческой меры сходства стимулов.

ТРЕХМОДАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

В [Carrol and Chang, 1972; Harshman, 1972 a, b; Tucker, 1972] предложена более общая модель многомерного шкалирования, чем взвешенная евклидова модель. Различие между формулировками Кэррола — Чанг, Харшмана и Такера, несущественное для изложения в этой книге, обсуждается в [Carroll and Wish, 1974 b]. Так как наш подход ближе всего к формулировке Такера, мы используем для обозначения модели его термин «трехмодальная модель».

Как и при применении взвешенной евклидовой модели, будем предполагать, что существует групповое пространство координат стимулов X . Согласно этой модели субъективные оценки различий при отсутствии ошибок измерений и выборки могут быть выражены стандартной функцией евклидова расстояния от координат стимулов, собственной для субъекта s , (6.3). Каждая собственная субъективная матрица координат X_s может быть записана как функция групповых координат стимулов, но функция, связывающая X с X_s , является в трехмодальной модели более сложной. Во взвешенной евклидовой модели

$$X_s = XW_s, \quad (6.20)$$

а в трехмодальной модели

$$X_s = XW_s T_s. \quad (6.21)$$

Здесь W_s , как и раньше, — диагональная матрица весов, а T_s — матрица преобразования с векторами-строками единичной длины. Иначе говоря, в соответствии с (6.21) правомерно утверждение, что координатное пространство каждого субъекта может быть получено комбинацией взвешивания и поворота координат группового пространства.

Взвешенная евклидова модель — специальный случай трехмодальной модели, когда у всех субъектов $T_s = I$.

На рис. 6.6 наглядно показано, как матрица преобразования T_s влияет на оценки координат. Представьте себе, что субъектов просили оценить все возможные пары девяти прямоугольников и групповое координатное пространство выглядит так, как на верхнем чертеже рис. 6.1. В верхней части рис. 6.6 показано координатное пространство стимулов для гипотетического субъекта с матрицей весов W_3 и матрицей преобразования T_3 . Матрица координат для этого субъекта была получена умножением X справа на произведение $W_3 T_3$. В этом случае W_3 влияния не оказывает, так как это единичная матрица.

Такое преобразование меняет расстояния между точками-стимулами. В верхней части рис. 6.1 стимул i находится на равных расстояниях от стимулов b и h ; $d_{bi} = d_{hi} = 1,42$. С другой стороны, в верхней части рис. 6.6 h ближе к i , чем b ; $d_{bi} = 1,74$, а $d_{hi} = 1,00$.

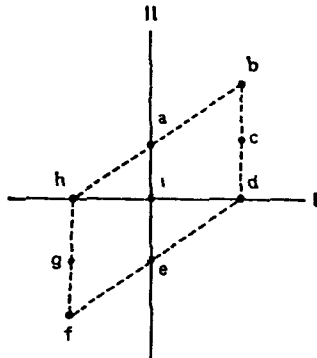
Чертеж в верхней части рис. 6.6 показывает совместное действие взвешивания и преобразования группового пространства стимулов. Взвешивание удлинняет конфигурацию, а преобразование превращает квадратную конфигурацию в параллелограмм.

Рассмотрим матрицу $R_s = T_s T_s'$ с элементами $r_{kk'}$. Трехмодальная модель может быть записана в параметрах w_{ks} и $r_{kk'}$ следующим образом:

$$\delta_{ij_s} = \left[\sum_k w_{ks}^2 (x_{ik} - x_{jk})^2 + \sum_{(k, k')} w_{ks} w_{k's} r_{kk'} (x_{ik} - x_{jk}) (x_{ik'} - x_{jk'}) \right]^{1/2}. \quad (6.22)$$

Если $r_{kk'}$ равно 0 для всех пар координат (k, k') , то вторая из сумм в правой части исчезает, и (6.22) сведется к взвешенной евклидовой модели (6.4). Сумма в правой части по парам (k, k') является суммой взаимодействий между разностями координат по всем возможным парам координатных осей. Параметр $r_{kk'}$ характеризует величину и направление взаимодействия между разностями координат по осям k и k' в оценках субъекта s . Знак $r_{kk'}$ указывает направление взаимодействия, а абсолютная величина — размер взаимодействия.

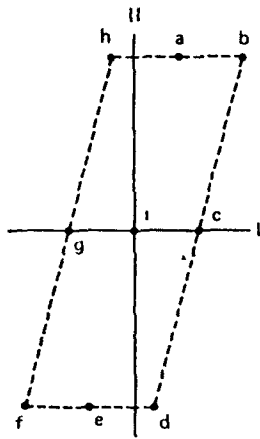
Матрицы субъективных весов W_s и матрицы субъективных преобразований T_s не будут самым экономным описанием характеристик субъектов. В этом случае имеется $2S$ матриц, одна матрица весов и одна матрица преобразований для каждого из S субъектов. Поэтому Л. Такер [Tucker, 1972] разработал метод получения одного набора субъективных оценок координат, содержащегося в $(S \times M)$ -матрице \widehat{Z} с элементами \widehat{z}_{sm} . Оценка координат в \widehat{Z} позволяет получить количественное координатное описание субъектов, аналогичное описанию стимулов с помощью матрицы \widehat{X} . У \widehat{Z} есть одна строка для каждого субъек-



$$X_3 = X \quad W_3 \quad T_3$$

I	II
$\begin{bmatrix} 0,00 & 0,71 \\ 1,00 & 1,42 \\ 1,00 & 0,71 \\ 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & -0,71 \\ -1,00 & -1,42 \\ -1,00 & -0,71 \\ -1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & -1,00 \\ 0,00 & -1,00 \\ -1,00 & -1,00 \\ -1,00 & 0,00 \\ -1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 & 0,71 \\ 0,00 & 0,71 \end{bmatrix}$
--	--



$$X_4 = X \quad W_4 \quad T_4$$

$\begin{bmatrix} 0,35 & 1,40 \\ 0,85 & 1,40 \\ 0,50 & 0,00 \\ 0,15 & -1,40 \\ -0,35 & -1,40 \\ -0,85 & -1,40 \\ -0,50 & 0,00 \\ -0,15 & 1,40 \\ 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & -1,00 \\ 0,00 & -1,00 \\ -1,00 & -1,00 \\ -1,00 & 0,00 \\ -1,00 & 1,00 \\ 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
--	---

$\begin{bmatrix} 0,50 & 0,00 \\ 0,00 & 2,00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,00 & 0,70 \\ 0,00 & 0,70 \end{bmatrix}$
--	--

Рис 66 Стимульные пространства для двух гипотетических субъектов и девяти стимулов

екта и один столбец для каждой координатной оси пространства субъектов. Число координатных осей в пространстве субъектов, M , обязательно равно числу координатных осей в пространстве стимулов, K . Это означает, что есть два координатных решения: одно — для пространства субъектов и одно — для пространства стимулов.

Размерность

Как всегда, решение о размерности принимается, в частности, путем рассмотрения воспроизводимости и интерпретируемости нескольких решений в различных размерностях. Как и в метрическом решении Торгерсона, в данном случае есть собственные векторы, которые могут помочь принять решение о размерности. Точнее говоря, существуют два набора собственных значений: один — для пространства стимулов, второй — для пространства субъектов. Для решения вопроса о размерности может оказаться полезным график зависимости собственных значений от размерности, такой, как на рис. 4.4. Если изгиб на графике зависимости собственных значений от размерности для пространства стимулов X появляется у размерности $(K + 1)$, то это ведет к предположению, что K — разумное число координатных осей, которые следует оставить в решении. Аналогично если изгиб на графике зависимости собственных значений от размерности для пространства субъектов появляется у размерности $(M + 1)$, то M — разумное число координатных осей, которые следует сохранить в пространстве субъектов Z .

Поворот

Как пространство стимулов, так и пространство субъектов можно поворачивать для получения интерпретируемого решения, т. е. если матрица X представляет собой решение (оценку координат пространства стимулов), то и $\hat{X}^* = \hat{X}T$ — также решение. Здесь T — любая матрица ортогонального преобразования. Аналогично если матрица \hat{Z} — решение для пространства субъектов, то $\hat{Z}^* = \hat{Z}T$ — также решение. И здесь T — любая матрица ортогонального преобразования. В общем случае матрица преобразования, дающего наиболее интерпретируемый поворот в пространстве субъектов, не будет совпадать с матрицей, обеспечивающей наиболее интерпретируемый поворот в пространстве стимулов. Если неповернутое решение интерпретировать трудно, то для улучшения интерпретируемости можно применять объективные и ручные повороты.

Привлекательное свойство взвешенной евклидовой модели состоит в том, что направление осей, в общем случае, фиксировано, и это сильно упрощает интерпретацию осей. В то время как при взвешенной

евклидовой модели проблема поворота практически не возникает, в трехмодальной модели она, вообще говоря, удваивается: может понадобиться один поворот для пространства субъектов, а второй — для пространства стимулов.

Интерпретация

Матрица координат стимулов \widehat{X} интерпретируется так же, как и при других моделях шкалирования. Идентифицируются осмысленные упорядочения и группировки стимулов.

Интерпретация пространства субъектов обычно начинается со зрительной идентификации дискретных кластеров субъектов. Субъекты, составляющие в пространстве субъектов кластер, имеют примерно одинаковые матрицы весов W_s и матрицы преобразований T_s . Пользователь должен описать различия между стимульными пространствами субъектов из различных кластеров. Это часто делается путем указания реальных субъектов, находящихся в центре каждого кластера. Каждый из этих субъектов служит типичным представителем субъектов своего кластера. В [Tucker, 1972] различные кластеры субъектов описаны приведенными субъективными матрицами весов и субъективными матрицами поворотов этих типичных представителей. Если бы субъекты 3 и 4 на рис. 6.6 были в центре двух кластеров, то рис. 6.6 мог бы служить описанием преобразования T_s , весов W_s и координат стимулов \widehat{X}_s для двух кластеров.

Трехмодальная модель Такера — самая общая модель многомерного шкалирования, включающая как частный случай взвешенную евклидову модель. Трехмодальное решение позволяет получить описание различий между субъектами не только в терминах субъективных весов, но и в терминах матриц, субъективных поворотов. Расширение общности трехходовой модели сопровождается повышением сложности. В тех случаях, когда размерности пространств стимулов и субъектов не малы, поворот и интерпретация могут обусловить серьезные проблемы. Подобные примеры читатель может найти в маркетинговом исследовании [Cooper, 1973].

* ПОДГОНКА ВЗВЕШЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ

Для подгонки взвешенной евклидовой модели существует много алгоритмов [Bloxom, 1978; Carroll and Chang, 1970; DeLeeuw and Pruzansky, 1978; Lingoes and Borg, 1978]. Описанный ниже алгоритм представляет собой модифицированный вариант алгоритма из [Carroll and Chang, 1970], включенного в алгоритм INDSCAL и алгоритм SINDSCAL [Pruzansky, 1975]. Основания этого алгоритма мы рассматривать в этой книге не будем. Наша цель состоит в том, чтобы дать

1972] требует вычисления средней матрицы скалярных произведений Δ^* :

$$\Delta^* = \frac{1}{S} \sum_s \Delta_s^* \quad (6.23)$$

С помощью метода главных компонент, описанного при обсуждении формулы (2.6), можно найти такую матрицу \tilde{X} , что $\tilde{X}\tilde{X}' = \Delta^*$. Первые K столбцов \tilde{X} образуют стартовую конфигурацию для K -мерного решения.

Повернув координатные оси в \tilde{X} , как описано в [Young, Takane and Lewuskyj, 1978], можно ускорить сходимость и уменьшить вероятность локального минимума. Однако для краткости в приведенном ни-

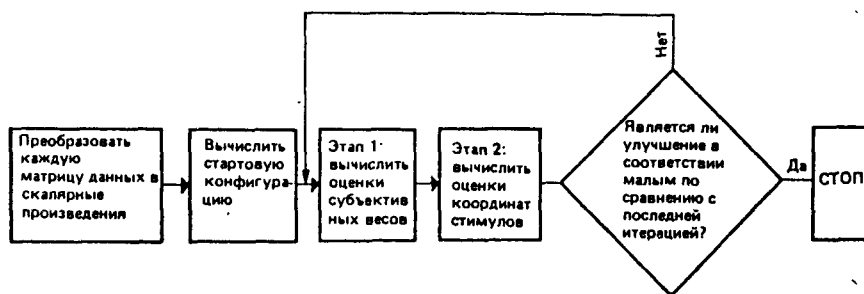


Рис. 6.7. Блок-схема алгоритма подгонки взвешенной евклидовой модели

же примере этот шаг опущен. Приведенная в табл. 6.3 матрица $\Delta^* = \frac{1}{2} (\Delta_1^* + \Delta_2^*)$ содержит усредненные скалярные произведения, \hat{X}^0 из табл. 6.3 содержит стартовую конфигурацию, первые две главные компоненты Δ^* .

Оставшаяся часть алгоритма состоит из итераций. Каждая итерация включает два этапа: первый — для оценки субъективных весов, а второй — для оценки координат стимулов. На рис. 6.7 приведена блок-схема такого алгоритма.

На первом этапе итерации, дающей новые оценки весов, нужно построить две матрицы, A и B . У матрицы A S строк, по одной для каждого субъекта, и I^2 столбцов, по одному для каждой пары стимулов. Первые I элементов в строке s — элементы строки 1 матрицы скалярных произведений субъекта s . Следующие I элементов строки s — элементы строки 2 матрицы скалярных произведений субъекта s . Третья группа из I элементов в строке s — строка 3 матрицы скалярных произведений субъекта s и т. д.

По существу, строка s матрицы A — это вектор, содержащий все элементы матрицы скалярных произведений субъекта s . Строка 1 мат-

рицы А из табл. 6.4 содержит все девять элементов матрицы скалярных произведений Δ_i^j из табл. 6.3. Каждая группа из трех элементов строки 1 матрицы А из табл. 6.4 соответствует одной строке Δ_1^j из табл. 6.3. Каждая группа из трех элементов строки 2 матрицы А соответствует одной строке Δ_2^j .

Т а б л и ц а 6.4. Матрицы, использованные на этапе 1

Стимул-строка	А	А	А	В	В	В	С	С	С
Стимул-столбец	А	В	С	А	В	С	А	В	С
А=субъект 1	0,33	-0,17	-0,17	-0,17	0,33	-0,17	-0,17	-0,17	0,33
субъект 2	0,11	0,11	-0,22	0,11	0,11	-0,22	-0,22	-0,22	0,44
В=координата I	0,10	0,10	-0,20	0,10	0,10	-0,20	-0,20	-0,20	0,40
координата II	0,12	-0,12	0,00	-0,12	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00

		Субъект	
		1	2
Координата			
$\widehat{W}^2 = (B B')^{-1} B A'$		I	II
		0,83	0,11
		2,00	0,00

У матрицы В есть по одному столбцу для каждой пары стимулов и по одной строке для каждой координаты k . Размерность В, таким образом, — $(K \times I^2)$. Элемент в строке, соответствующей координатной оси k , и в столбце, соответствующем паре стимулов (i, j) , определяется как

$$b_{k(i,j)} = \widehat{x}_{ik} \widehat{x}_{jk}, \quad (6.24)$$

где \widehat{x}_{ik} и \widehat{x}_{jk} — текущие оценки координат стимулов. На первой итерации \widehat{x}_{ik} и \widehat{x}_{jk} получаются из стартовой конфигурации. На всех последующих итерациях это оценки предыдущей итерации.

В табл. 6.4 приведена матрица В, вычисленная по координатам стартовой конфигурации \widehat{X}^0 из табл. 6.3. Например, элемент в строке 1, столбец 3, соответствует координате I и паре стимулов (А, С). Поэтому он был вычислен по формуле (6.24) из координат стартовой конфигурации, взятых из табл. 6.3:

$$b_{I(A,C)} = \widehat{x}_{AI}^0 \widehat{x}_{CI}^0 = (-0,31)(0,63) = -0,20. \quad (6.25)$$

После построения матриц А и В матрицу $\widehat{W}^2 (K \times S)$ с элементами \widehat{w}_{ks}^2 можно оценить так:

$$= \widehat{W}^2 = (B B')^{-1} B A'. \quad (6.26)$$

Элементы \widehat{W}^2 , точнее их квадратные корни, становятся весами для текущей итерации.

Для того чтобы начать этап 2, должны быть построены новые матрицы A и B . A снова содержит скалярные произведения. На этом этапе у матрицы A — по одной строке для каждого стимула и по одному столбцу для каждой возможной пары (субъект, стимул). Поэтому у нее I строк и JS столбцов. Элемент в строке i и столбце, соответствующем стимулу j и субъекту s , — δ^*_{ijs} , — скалярное произведение для пары стимулов (i, j) в матрице скалярных произведений субъекта s .

В табл. 6.5. показана матрица A , построенная из матриц скалярных произведений, приведенных в табл. 6.3. Первые три элемента в строке A матрицы A взяты из строки A матрицы Δ^*_1 табл.6.3; вторые три элемента строки A матрицы A взяты из строки A матрицы Δ^*_2 табл. 6.3. Шесть элементов в строке B матрицы A взяты из строк B в Δ^*_1 и Δ^*_2 и т. д.

Т а б л и ц а 6.5. Матрицы, использованные на этапе 2

Субъект	1	1	1	2	2	2
Стимул	A	B	C	A	B	C
$A =$	$\begin{bmatrix} 0,33 & -0,17 & -0,17 & 0,11 & 0,11 & -0,22 \\ -0,17 & 0,33 & -0,17 & 0,11 & 0,11 & -0,22 \\ -0,17 & -0,17 & 0,33 & -0,22 & -0,22 & 0,44 \end{bmatrix}$					
$B =$	$\begin{bmatrix} I & -0,26 & -0,26 & 0,52 & -0,34 & -0,34 & 0,70 \\ II & 0,70 & -0,70 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$					
Координата						
Стимулы						
$\widehat{X} = A B' (B B')^{-1} = \begin{bmatrix} A & -0,32 & 0,36 \\ B & -0,32 & -0,36 \\ C & 0,63 & 0,00 \end{bmatrix}$						

Матрица B имеет K строк, по одной для каждой координатной оси, и JS столбцов для каждой пары стимул — субъект. Элемент в строке k , соответствующий субъекту s и стимулу j , определяется так:

$$b_{k(sj)} = \widehat{\omega}_{ks}^2 \widehat{x}_{jk}. \quad (6.27)$$

Здесь $\widehat{\omega}_{ks}$ и \widehat{x}_{jk} — текущие оценки соответствующих величин. В табл. 6.5 показана матрица B , построенная из координат стартовой конфигурации в табл. 6.3 и оценок весов в табл. 6.4. Например, элемент в строке 1, столбец 3, матрицы B , соответствующий оси I , субъекту 1 и стимулу C , вычисляется так:

$$b_{I(1C)} = \widehat{\omega}_{I1}^2 \widehat{x}_{C1}^2 = (0,83) (0,63) = 0,52. \quad (6.28)$$

После того как найдены A и B , можно получить новую матрицу оценок координат \hat{X} по формуле

$$\hat{X} = AB' (BB')^{-1}. \quad (6.29)$$

Элементы \hat{X} становятся текущими оценками координат стимулов. Матрица \hat{X} в нижней части табл. 6.5 показывает новые значения этих оценок, полученные подстановкой матриц A и B в (6.29). После вычисления \hat{X} первая итерация завершается.

Описанный алгоритм предназначен для минимизации суммы квадратов разностей между предсказанными и фактическими скалярными произведениями:

$$F = \sum_{(i,j,s)} (\delta_{ijs}^* - \hat{\delta}_{ijs}^*)^2, \quad (6.30)$$

где предсказанные скалярные произведения δ_{ijs}^* определяются как

$$\hat{\delta}_{ijs}^* = \sum_k \hat{x}_{ik} \hat{x}_{jk} \hat{w}_{ks}^2. \quad (6.31)$$

Итерации будут продолжаться до тех пор, пока улучшение F от одной итерации к следующей не станет меньше некоторого достаточно малого числа, такого, как 0,001.

В табл. 6.6 приведены предсказанные скалярные произведения $\hat{\Delta}_s^*$ и оцененные расстояния \hat{D}_s :

$$\hat{d}_{ijs} = \left[\sum_k \hat{w}_{ks}^2 (\hat{x}_{ik} - \hat{x}_{jk})^2 \right]^{1/2}, \quad (6.32)$$

подсчитанные для обоих субъектов по матрице оценок весов \hat{W}^2 из табл. 6.4 и оценкам координат \hat{X} из табл. 6.5. Сравнение предсказанных скалярных произведений из табл. 6.6 и фактических скалярных произведений из табл. 6.3 показывает, что, за исключением первых двух диагональных элементов матриц субъекта 1, они совпадают. Сумма квадратов разностей после первой итерации равна 0,0002. С точностью до двух знаков после запятой мера соответствия (6.15), т. е. корреляция между предсказанными и фактическими скалярными произведениями, равна 1,00. Оцененные расстояния из табл. 6.6 очень хорошо согласованы с фактическими различиями, показанными в табл. 6.3.

После завершения итераций значения во всех столбцах \hat{X} стандартизуются так, чтобы дисперсия значений по каждой координате была равна 1,00. Затем, повторяя этап 1, еще раз оценивают \hat{W}^2 по (6.26).

Таблица 6.6. Матрицы оцененных расстояний и скалярных произведений для трех стимулов и двух субъектов

Стимул	A	B	C	Стимул	A	B	C
<i>Матрицы оцененных расстояний</i>							
$\hat{\Delta}_1 =$	A	B	C	$\hat{\Delta}_2 =$	A	B	C
	0,00	1,02	1,00		0,00	0,00	1,00
	1,02	0,00	1,00		0,00	0,00	1,00
	1,00	1,00	0,00		1,00	1,00	0,00
<i>Матрицы предсказанных скалярных произведений</i>							
$\hat{\Delta}_1 =$	A	B	C	$\hat{\Delta}_2 =$	A	B	C
	0,34	-0,17	-0,17		0,11	0,11	-0,22
	-0,17	0,34	-0,17		0,11	0,11	-0,22
	-0,17	-0,17	0,33		-0,22	-0,22	0,44

Резюмируя, отметим, что алгоритм начинается с преобразования матрицы различий каждого субъекта в скалярные произведения. Матрица скалярных произведений каждого субъекта может быть стандартизована, после чего вычисляется стартовая конфигурация. Основную часть алгоритма составляет ряд итераций. Каждая из итераций включает этап оценки субъективных весов и этап оценки координат стимулов. Итерации будут продолжаться до тех пор, пока улучшение соответствия от одной итерации к следующей не станет меньше некоторой достаточно малой величины. После прекращения итераций значения оценок стандартизуются так, чтобы дисперсия оценок по каждой координатной оси была равна 1,00, а затем последний раз оцениваются веса.

ВЫВОДЫ

Взвешенная евклидова модель и трехмодальная модель дают основу для анализа индивидуальных различий при многомерном шкалировании данных о различии. Оба подхода позволяют получить количественное координатное описание субъектов и стимулов, что обеспечивает более общий анализ, чем подходы, описанные в предыдущих главах.

Во взвешенной евклидовой модели предполагается, что субъекты различаются весами, которые они приписывают координатным осям. Широко распространены различные программы подгонки этой модели:

INDSCAL [Carroll and Chang, 1970], SINDSCAL [Pruzansky, 1976] и ALSCAL [Young and Lewyckij, 1979].

Программы для подгонки взвешенной евклидовой модели, сравниваемые в [Schiffman et al., 1981], дают возможность найти оценки субъек-

активных весов и координат стимулов. В общем случае решение нельзя повернуть без потери соответствия данным. Матрица координат интерпретируется путем идентификации существующих осмысленных упорядочений и группировок стимулов. Первоначальные оценки субъективных весов сохраняют информацию об относительной важности координат и о соответствии модели данным, полученным от субъектов. Взвешенная евклидова модель, в частности, доказала свою эффективность в исследованиях восприятия социальной структуры малых групп членами этих групп.

Трехмодальная модель, описанная в [MacCallum, 1979], включает как частный случай взвешенную евклидову модель. В этой модели предполагается, что субъекты различаются не только весами, которые они присваивают координатам, но так же степенью и направлением взаимодействия между парами координат, которые отражены в их оценках. Из трехмодального анализа можно получить оценки координат стимулов, субъективных весов и субъективных матриц преобразований. Трехмодальное решение — самое общее из всех решений многомерного шкалирования. Эта общность ведет, однако, к серьезным проблемам, так как для получения интерпретируемого решения может оказаться необходимым поворачивать отдельно как пространство субъектов, так и пространство стимулов.

ЗАДАЧИ

Представьте себе, что четыре человека дали оценки различий всех возможных пар стран, приведенных в задаче 1 из гл. 4. Их матрицы различий показаны в табл. 6.7. Примените к этим данным программу подгонки взвешенной евклидовой модели. Получите решение в размерностях 1—6. Затем ответьте на вопросы.

Таблица 6.7. Матрицы различий для четырех субъектов и восьми стимулов-стран

Субъект 1

Страна	Ангола	Аргентина	Австралия	Китай	Куба	Япония	США	Зимбабве
Ангола								
Аргентина	1,41							
Австралия	1,00	1,00						
Китай	1,00	1,73	1,41					
Куба	1,41	1,41	1,73	1,00				
Япония	1,41	1,41	1,00	1,00	1,41			
США	1,73	1,00	1,41	1,41	1,00	1,00		
Зимбабве	0,71	1,41	1,00	1,00	1,41	1,41	1,73	

Субъект 2

Страна	Ангола	Аргентина	Австра- лия	Китай	Куба	Япония	США	Зимбаб- ве
Ангола								
Аргентина	1,00							
Австралия	2,00	2,00						
Китай	3,00	3,00	2,00					
Куба	1,00	1,00	3,00	1,00				
Япония	2,00	2,00	1,00	2,00	1,00			
США	3,00	3,00	2,00	3,00	2,00	2,00		
Зимбабве	1,00	1,00	3,00	1,00	3,00	3,00	1,00	

Субъект 3

Страна	Ангола	Аргентина	Австра- лия	Китай	Куба	Япония	США	Зимбаб- ве
Ангола								
Аргентина	1,41							
Австралия	1,41	1,00						
Китай	1,00	1,41	1,41					
Куба	1,00	1,41	1,41	1,00				
Япония	1,41	1,00	1,00	1,41	1,41			
США	1,41	1,00	1,00	1,41	1,41	1,00		
Зимбабве	1,00	1,41	1,41	1,00	1,00	1,41	1,41	

Субъект 4

Страна	Ангола	Аргентина	Австра- лия	Китай	Куба	Япония	США	Зимбаб- ве
Ангола								
Аргентина	1,00							
Австралия	0,00	1,00						
Китай	1,00	0,00	1,00					
Куба	1,41	1,00	1,41	1,00				
Япония	1,00	1,41	1,00	0,00	1,00			
США	1,41	1,00	1,41	1,00	0,00	1,00		
Зимбабве	0,00	1,00	0,00	1,00	1,41	1,00	1,41	

1. Нарисуйте график зависимости меры соответствия от размерности. Сколько координатных осей следует сохранить? Обоснуйте ваш ответ.

2. Данные какого субъекта подогнаны в трехмерном решении хуже всего? Данные какого субъекта подогнаны лучше всего? Обоснуйте ваш ответ с помощью статистик, которые печатает программа.

3. Найдите трехмерную матрицу координат стимулов \hat{X} . Как вы интерпретируете оси координат?

4. Найдите матрицу субъективных весов \hat{W} для трехмерного решения. Опишите различия между субъектами, представленные матрицей \hat{W} .

ОТВЕТЫ

Результаты, приведенные на рис. 6.8, получены с помощью программы SINDSCAL [Pruzansky, 1975]. Другие программы обеспечивают похожие, но не идентичные численные результаты. Читатели, применяющие иные версии SINDSCAL или разные значения параметров этой программы, также получат похожие, но не идентичные результаты. Иными словами, не следует ожидать совпадения своих результатов с ответами, как это было в гл. 1—4.



Рис. 6.8. Корреляции между фактическими и оцененными скалярными произведениями в размерностях 1—6 для данных о различных странах

1. График приведен на рис. 6.8. Изгиб есть у размерности 2 и несколько меньший — у размерности 3. На основе этой меры соответствия можно выбрать двух- или трехмерное решение.

Применение критерия интерпретируемости не решает вопроса однозначно. В двумерном решении на одном конце первой координатной оси — социалистические страны и страны социалистической ориентации, а на другом — капиталистические. На одном конце второй координатной оси — страны Южного полушария, а на другом — Северного.

В трехмерном решении легко интерпретируются первые две координатные оси, а интерпретация

третьей проблематична (см. задачу 3). На основе критериев интерпретируемости и соответствия можно выбрать как двухмерное решение, так и трехмерное.

2. Хуже всего подогнаны данные субъекта 2: $r_2 = 0,63$. Лучше всего подогнаны данные субъекта 3: $r_3 = 1,00$. Для двух оставшихся субъектов статистики $r_1 = 0,95$ и $r_4 = 0,87$.

3.

$\hat{X} =$	Стимулы	Координаты		
		I	II	III
Ангولا		0,33	0,37	-0,32
Аргентина		-0,35	-0,13	-0,56
Австралия		-0,38	0,43	0,03
Китай		0,40	0,00	0,45
Куба		0,34	-0,53	0,06
Япония		-0,33	0,02	0,54
США		-0,36	-0,51	0,08
Зимбабве		0,34	0,35	-0,28

На положительном конце оси I — социалистические страны: Китай и Куба, а также страны социалистической ориентации: Ангола и Зимбабве *. На отрицательном конце — капиталистические страны: Аргентина, Австралия, Япония, США. Эту ось условно назовем осью политической ориентации.

Страны Восточного полушария — Ангола, Зимбабве, Австралия, Китай, Япония — расположены на положительном конце или в середине оси II. Страны Западного полушария — Аргентина, Куба, США — находятся на отрицательном конце. Эту ось назовем осью Восток — Запад.

Если исключить Австралию и США, то ось III можно считать осью Север — Юг. Три страны Южного полушария — Ангола, Аргентина, Зимбабве — имеют отрицательные координаты. Япония и Китай, имеющие большие положительные координаты, относятся к Северному полушарию. Поскольку Куба из этих стран ближе всего к экватору, ее небольшая положительная координата по оси III согласуется с интерпретацией этой оси как Север — Юг.

4.	Субъект				Ось
$\hat{W} =$	1	2	3	4	
	0,57	0,34	1,00	0,05	Политическая ориентация Восток—Запад Север—Юг
	0,66	0,24	0,00	0,78	
	0,33	0,46	0,00	0,35	

Для первого субъекта наиболее важны ось политической ориентации и ось Восток — Запад, а у оси III, Север — Юг, вес заметно меньше. У второго субъекта веса координатных осей ближе друг к другу, чем у всех остальных. Оценки третьего субъекта отражают, оказывается, только ось политической ориентации. Для четвертого субъекта наиболее важна ось Восток — Запад, хотя его оценки отражают и ось Север — Юг.

* Правящая партия Зимбабве заявила о намерении приступить к проведению курса на построение общества, основанного на принципах научного социализма. — *Примеч. пер.*

Как объяснено в гл. 1, К. Кумбс [Coombs, 1964] предложил дистанционную модель для данных о предпочтении, часто называемую моделью развертывания. Однако мы будем называть ее дистанционной моделью для предпочтений. Согласно такой модели субъекты могут быть охарактеризованы наборами параметров x_{sk} , которые являются координатами их идеальных точек. Координата x_{sk} — это то значение по оси k , которое субъект считает идеальным. Взятые вместе K идеальных координат субъекта s дают такую комбинацию характеристик стимулов, которую он считает идеальной. В соответствии с моделью, чем больше стимул напоминает идеал, тем более он будет предпочитаться.

Пусть δ_{is} — величина предпочтения стимула i субъектом s . Будем предполагать, что более высокое значение δ_{is} обозначает меньшую величину предпочтения. Иными словами, δ_{is} — мера того, насколько стимул i не нравится. В самой простой, метрической версии модели предполагается, что

$$\delta_{is} = d_{is} = \left[\sum_k (x_{ik} - x_{sk})^2 \right]^{1/2}, \quad (7.1)$$

где x_{ik} , как и раньше, — значение признака k у стимула i . В этой модели предполагается, что субъект формирует свои оценки предпочтений путем сравнения координат стимулов с координатами своей идеальной точки. Стимулы, расположенные в пространстве дальше всего от идеала, нравятся меньше всего. Дж. Кэрролл [Carroll, 1972] анализ предпочтений методами многомерного шкалирования делит на два типа: внутренний и внешний. Внутренний анализ позволяет получить оценки координат стимулов, идеальных точек субъектов и меру соответствия. Во внешнем анализе координаты стимулов предполагаются известными или из теории, или потому, что шкала построена раньше. Внешний анализ дает возможность найти меру соответствия и оценки различных параметров субъекта, в том числе координаты идеальной точки. С помощью методов внешнего анализа проводят формальную проверку гипотез о моделях предпочтения. При внутреннем анализе этого не делают.

Настоящая глава состоит из двух частей. В первой описывается неметрический внутренний анализ данных о предпочтении. Этот анализ

очень напоминает методы, рассмотренные в гл. 5, за исключением того, что матрица данных — это матрица предпочтений, а не различий, и кроме координат стимулов следует оценить координаты идеальных точек. Монотонная функция, связывающая предпочтения с расстояниями, также определяется иначе.

Во второй части описывается внешний анализ данных о предпочтениях и иерархия четырех моделей предпочтения, каждая из которых может быть подождена к данным стандартными методами множественной регрессии. С помощью регрессионных методов вычисляют оценки параметров субъектов в различных моделях. Они обеспечивают и статистические тесты для гипотез о соответствии моделей данным.

В моделях предпочтений параметры субъектов x_{sk} — координаты идеальной точки — существенно отличаются от параметров субъектов, описанных в предыдущей главе, т. е. от весов w_{ks} . Субъективные веса определяют пространство, не совпадающее с пространством стимулов. С другой стороны, идеальные точки расположены в том же пространстве, что и точки-стимулы. Знакомясь с методами внутреннего анализа, читатель должен пересмотреть свой взгляд на матрицу X . Матрица X содержит не только координаты точек-стимулов x_{ik} , но и координаты идеальных точек x_{sk} . Она, как и раньше, имеет K столбцов и $(I + S)$ строк, по одной для каждого стимула и каждого субъекта. Графическое представление X дает возможность увидеть точки-стимулы и точки-субъекты.

НЕМЕТРИЧЕСКИЙ ВНУТРЕННИЙ АНАЛИЗ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Этот параграф начинается с обсуждения данных, использованных для иллюстрации неметрического внутреннего анализа предпочтений. Затем описывается неметрическая модель данных о предпочтении, причем большое внимание уделяется монотонной функции, которая должна связывать наблюдаемые предпочтения с теоретическими расстояниями в евклидовом пространстве. Даже рассмотрены проблемы, возникающие при анализе данных о предпочтении. Это относится к размерности, повороту и интерпретации решения.

В нашем гипотетическом исследовании супружеские пары упорядочивали по предпочтению девять стимулов (табл. 7.1). Ранг 1 — наиболее предпочитаемый стимул, ранг 9 — наименее предпочитаемый. Предполагается, что субъекты выполняли задание по упорядочению, но данные для внутреннего анализа могут быть получены из любого задания, в котором каждый из субъектов должен расположить стимулы от наиболее предпочитаемого к наименее предпочитаемому.

Каждый стимул в табл. 7.1 описывает состав семьи. Столбец 1 показывает, что гипотетическая пара A наиболее предпочитает семью без детей, ноль девочек и ноль мальчиков. Наименее предпочитаемый состав — семья из четырех детей, две девочки и два мальчика. Координаты стимулов в таблице очевидны — число девочек и число мальчи-

Таблица 71 Ранговые порядки предпочтений девяти стимулов (девять вариантов состава семьи*) супружескими парами

Число мальчиков	Число девочек	Ранги предпочтений для супружеской пары					
		A	B	C	D	E	F
0	0	1	9	5	6	6	7
0	1	2	8	3	7	2	3
0	2	5	5	1	9	7	8
1	0	3	7	8	2	3	4
1	1	4	4	4	4	1	1
1	2	8	2	2	8	4	5
2	0	6	6	9	1	8	9
2	1	7	3	7	3	5	2
2	2	9	1	6	5	9	6

* 1 — наиболее предпочитаемый состав семьи.

ков, но с помощью приведенных данных можно адекватно проиллюстрировать методы внутреннего анализа предпочтений. Данные — гипотетические, но они основаны на реальном исследовании предпочтений состава семьи [Coombs et al., 1973]. В этой главе матрица данных — матрица ($I \times S$), с одной строкой для каждого стимула и одним столбцом для каждого субъекта.

В самой общей, неметрической форме дистанционная модель для предпочтений предполагает, что при отсутствии ошибок наблюдаемые предпочтения будут связаны с расстояниями следующим образом:

$$\delta_{is} = f_s(d_{is}) = f_s \left[\sum_k (x_{ik} - x_{sk})^2 \right]^{1/2}. \quad (7.2)$$

В (7.2) f_s обозначает монотонную функцию субъекта s . Допустив, что для каждого субъекта своя монотонная функция, можно избежать предположения, что все субъекты выражают предпочтение в одной и той же шкале. В случаях, когда допускается своя монотонная функция для каждого столбца s матрицы данных, анализ называется условным по столбцу¹.

Условный по столбцу неметрический анализ ограничивает отклонения $\hat{\delta}$ таким образом, чтобы сохранить в каждом столбце порядковую информацию. Однако отклонения $\hat{\delta}$ не ограничиваются так, чтобы сохранить порядковую информацию в строках. А именно в неметрическом, условном по столбцу анализе данные δ_{is} и отклонения $\hat{\delta}_{is}$ должны удовлетворять следующему ограничению:

$$\delta_{is} < \delta_{js} \Rightarrow \hat{\delta}_{is} \leq \hat{\delta}_{js} \quad \text{для всех } (i, j). \quad (7.3)$$

¹ Если для каждой строки матрицы данных допускается своя монотонная функция, то анализ называется условным по строке.

Условное по столбцу ограничение в (7.3) намного слабее, чем безусловное ограничение (5.11), применяемое в неметрическом многомерном шкалировании данных о различии.

Большинство описанных в гл. 5 неметрических программ для ЭВМ может выполнять неметрический внутренний анализ данных о предпочтении, таких, как данные в табл. 7.1. Помимо вида неметрической дистанционной модели [сравните (5.1) с (7.2)], неметрический анализ различий и неметрический анализ предпочтений не похожи и в других отношениях. В анализе различий матрица данных, как правило, квадратная и симметрическая, а в анализе предпочтений это обычно прямоугольная матрица ($I \times S$) с одной строкой для каждого стимула и одним столбцом для каждого субъекта. В анализе предпочтений стресс, формула 2, и S-стресс, формула 2, менее подвержены некоторым видам вырожденности, чем стресс, формула 1, и S-стресс, формула 1 [Kruskal and Carroll, 1969; Roskam, 1969; Young, 1972] *.

Выходная информация программы неметрического анализа предпочтений очень похожа на выходную информацию при анализе данных о различии. Единственное исключение в том, что приводятся оценки координат как стимулов, так и идеальных точек. Решения о размерности, повороте и интерпретации конфигурации принимают при анализе предпочтений так же, как и при анализе различий.

Размерность

Если размерность K неизвестна, то следует получить решение в нескольких различных размерностях. Как и в гл. 5,6, разумный подход — получить решения в размерностях от $(K^* - 3)$ до $(K + 3)$, где K^* — наилучшая априорная оценка K . Получив несколько решений, пользо-

* Приведем коэффициент, сравнивающий набор упорядочений с конфигурацией и не требующий построения отклонений:

$$\theta^2 = \frac{1}{S} \frac{\sum_{i < j} e_{ij}^s (\hat{d}_{is}^2 - \hat{d}_{js}^2)^2}{\sum_{i < j} (\hat{d}_{is}^2 - \hat{d}_{js}^2)^2}, \quad (7.3a)$$

где

$$e_{ij}^s = \begin{cases} 1, & \text{если порядок расстояний } \hat{d}_{is} \text{ и } \hat{d}_{js} \text{ не совпадает с порядком} \\ & \text{предпочтений } \delta_{is} \text{ и } \delta_{js}. \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Этот коэффициент, аналогичный мере Джонсона (5.20a) для данных о близости [Johnson, 1973], введен для анализа упорядочений (а также произвольных бинарных отношений) в [Каменский, 1975] и подробно описан в [Каменский, 1977a]. Время его подсчета для набора упорядочений существенно меньше, чем время подсчета стресса и S-стресса, требующих построения отклонений δ . На этом коэффициенте основан парный метод неметрического развертывания (т.е. неметрического шкалирования матрицы упорядочений), реализованный в программе PARSUN (см. приложение). — *Примеч. пер.*

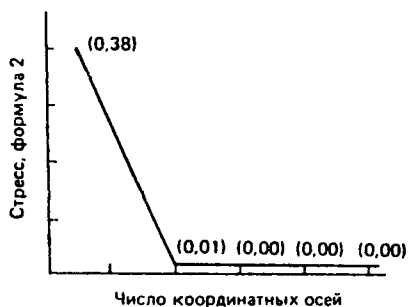


Рис 7.1. График зависимости меры соответствия от размерности для неметрического внутреннего анализа упорядочений состава семьи по данным табл. 7.1

ватель может выбрать одно из них на основе соответствия, интерпретируемости и воспроизводимости.

На рис. 7.1 приведен график зависимости меры соответствия от размерности для данных табл. 7.1 Он явно показывает, что $K=2$, поэтому следует выбрать двумерное решение, для которого стресс равен 0,01. В табл. 7.2 приведена матрица координат этого решения. Первые девять строк матрицы \hat{X} содержат оценки координат стимулов, а последние шесть строк — оценки координат идеальных точек объектов.

Таблица 7.2. Двумерные оценки координат стимулов и идеальных точек субъектов: результат неметрического внешнего анализа данных о предпочтении состава семьи (см. табл. 7.1)

Стимул		Координата	
число девочек	число мальчиков	I	II
0	0	-0,873	-0,716
0	1	-0,726	-0,028
0	2	-0,531	0,966
1	0	-0,040	-0,774
1	1	-0,154	0,033
1	2	0,079	0,853
2	0	0,647	-0,967
2	1	0,592	-0,165
2	2	1,025	0,443
Супружеская пара			
	A	-0,974	-0,625
	B	1,193	0,985
	C	-0,702	1,141
	D	0,782	-1,180
	E	-0,331	0,052
	F	0,011	-0,018

Поворот

Так как (7.2) — евклидова модель, то без потери соответствия конфигурации данным можно применить ортогональный поворот. Иначе говоря, если X — матрица $(I+S) \times K$, содержащая решение, т. е. оцен-

ки координат стимулов и идеальных точек, то и матрица $\widehat{X}^* = \widehat{X}T$ также будет решением. Здесь T — матрица ортогонального преобразования. Для получения интерпретируемого решения можно, если необходимо, использовать как объективные, так и ручные повороты.

Интерпретация

Интерпретация результатов неметрического анализа предпочтений аналогична интерпретации результатов анализа различий. Начинают с идентификации важных по смыслу группировок и упорядочений стимулов. Затем пытаются идентифицировать интерпретируемые упорядочения и группировки субъектов.

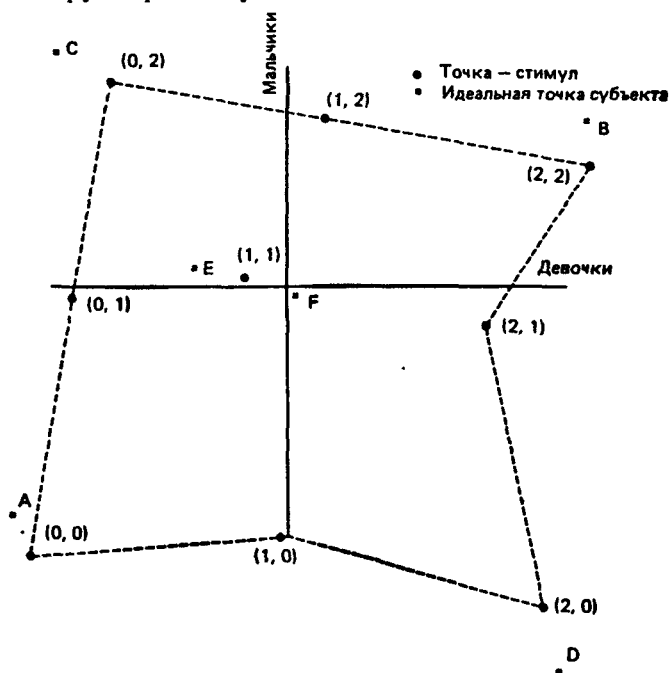


Рис 7.2. Двумерная конфигурация координат стимулов и идеальных точек субъектов по данным табл. 7.2. Числа в скобках около каждой точки-стимула указывают число девочек (первое) и число мальчиков (второе) в стимуле

На рис. 7.2 приведена конфигурация для данных табл. 7.2*. Отметим, что на конфигурации есть точки двух типов — точки-стимулы,

* Аналогичная конфигурация получается при применении к данным табл. 7.1 программы парного неметрического многомерного развертывания PARSUN, основанной на коэффициенте θ (7.3а) ($\theta = 0,0007$), с Краскаловской стартовой конфигурацией. — *Примеч. пер.*

представленные кругами, и идеальные точки субъектов, представленные квадратами. Точки-стимулы и точки-субъекты расположены в пространстве, определяемом двумя субъективными координатными осями. Однако расположение точек по двум субъективным координатам примерно соответствует их расположению по двум объективным признакам—числу мальчиков и числу девочек. Координаты по оси I примерно соответствуют числу девочек в каждом составе семьи. Три семьи без девочек имеют по оси I значения от $-0,90$ до $-0,50$. Семьи с одной девочкой лежат в пределах от $-0,04$ до $0,08$. Семьи с двумя девочками имеют шкальные значения не менее $0,59$.

Координатная ось II отражает число мальчиков в каждом составе семьи. Семьи без мальчиков имеют шкальные значения ниже $-0,70$. Семьи с одним мальчиком имеют значения от $-0,20$ до $0,10$. Все три семьи с двумя мальчиками имеют по оси II значения больше $0,40$.

Не имея информации о парах, невозможно проинтерпретировать расположение их идеальных точек. Все идеальные точки пар расположены около наиболее предпочитаемых стимулов.

Для оценки координат стимулов и идеальных точек субъектов условный по столбцу анализ должен опираться только на порядковую информацию в каждом столбце матрицы данных. Это означает, что имеется очень мало информации для построения оценок координат. Вследствие этого оценки координат обычно вычисляются с гораздо меньшей точностью, чем при безусловном анализе данных о различии. Вырожденности и локальные минимумы встречаются при условном по столбцу анализе гораздо чаще, чем при безусловном. Отчасти по этим причинам в опубликованных работах содержится относительно мало примеров неметрического внутреннего анализа предпочтений.

ВНЕШНИЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе обсуждаются четыре модели из иерархии моделей предпочтения Кэррола: векторная модель, простая евклидова модель, взвешенная евклидова модель и обобщенная евклидова модель. Описываются также статистики соответствия для различных моделей и типы гипотез, которые можно проверять при внешнем анализе. В следующем параграфе рассматриваются процедуры оценок параметров субъектов и вычисления различных статистик, используемых при проверке гипотез.

Хотя по следующему параграфу читатель не узнает, как оцениваются параметры, ему следует иметь в виду, что процедуры оценок Кэррола основаны на стандартных процедурах множественной регрессии, а различные оценки параметров субъектов представляют собой регрессионные веса или выведены из регрессионных весов. Существуют специальные программы для подгонки одной или нескольких из этих четы-

рех моделей* [Carroll, and Chang, 1967; Davison, 1976, 1980; Srinivasan and Shocker, 1973]. Для подгонки каждой модели в ее метрической форме можно применять и программы множественной регрессии из пакетов программ для социологов **. Основной входной информацией для такого анализа служат данные о предпочтении субъекта и оценки координат стимулов. Выходная информация содержит (для каждого субъекта) оценки параметров и меру соответствия.

В иерархии Кэррола различие между векторной моделью и тремя евклидовыми моделями в некоторых отношениях более существенно, чем между тремя евклидовыми моделями. До начала детального описания всех четырех моделей рассмотрим различие между векторной моделью и евклидовыми моделями.

Сравнительный анализ векторной модели и дистанционных моделей

Четыре модели Кэррола [Carroll, 1972] включают одну линейную модель — векторную — и три нелинейных дистанционных модели — простую евклидову, взвешенную евклидову и обобщенную евклидову. Нелинейные дистанционные модели существенно отличаются от векторной модели.

В векторной модели предполагается, что предпочтение стимула субъектом линейно увеличивается (или уменьшается) в зависимости от шкальных значений стимулов по каждой координатной оси. Например, в нашем исследовании состава семей, если супружеская пара хочет иметь большое число детей, так что их предпочтение состава семьи линейно увеличивается как с увеличением числа девочек, так и с увеличением числа мальчиков, то предпочтение этой пары удовлетворяет векторной модели. Если супружеская пара совсем не хочет иметь детей, то предпочтение этой пары удовлетворяет векторной модели в случае, когда оно линейно возрастает как при приближении к нулю числа мальчиков, так и при приближении к нулю числа девочек. Супружеская пара, которая любит девочек, а не мальчиков, будет удовлетворять векторной модели, если ее предпочтение состава семьи будет линейно увеличиваться с увеличением числа девочек и линейно уменьшаться с увеличением числа мальчиков. В векторной модели предполагается, что предпочтения субъектов являются монотонной функцией шкальных значений стимулов по каждой из координат и эта монотонная функция должна иметь определенную форму — линейную.

* Подгонку неметрической формы простой евклидовой модели можно осуществлять с помощью программы PARSUN в следующем режиме: конфигурация стимулов вводится и не сдвигается, а двигается только точка-субъект. Однако это менее рационально, чем подгонка с помощью специальной программы. — *Примеч. пер.*

** Тексты программ регрессионного анализа на Фортране приведены в [Алгоритмы и программы восстановления зависимостей, 1984; Сборник научных программ на Фортране, 1974, вып. 1; Песаран и Слейтер, 1984]. — *Примеч. пер.*

В моделях евклидова расстояния функции, связывающие предпочтения со шкальными значениями стимулов, не должны быть ни линейными, ни даже монотонными. Дистанционные модели допускают, что предпочтения и шкальные значения могут быть связаны криволинейной монотонной функцией или одновершинной немонотонной функцией. Для пояснения этих двух типов зависимости — криволинейной монотонной и одновершинной монотонной — вернемся к примеру о составе семей.

Представьте себе супружескую пару, которой хочется иметь много детей. Ее предпочтение состава семьи может устойчиво увеличиваться

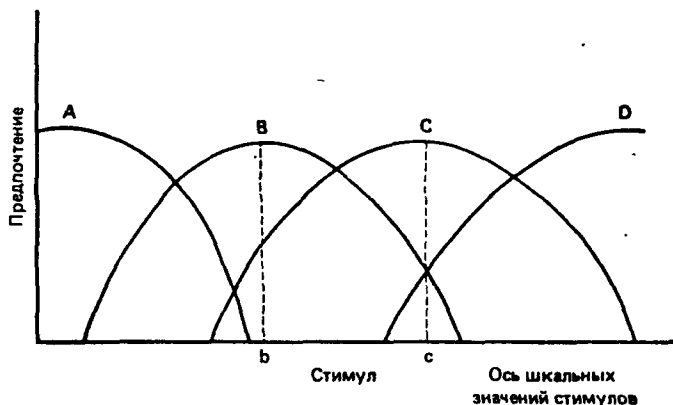


Рис. 7.3. Одновершинные и монотонные функции предпочтения для четырех субъектов

как при увеличении числа мальчиков, так и при увеличении числа девочек. Но это изменение нелинейно. Кривая D на рис. 7.3 показывает функцию предпочтения, в которой значение предпочтения, отложенное на вертикальной оси, возрастает с увеличением шкального значения стимула, отложенного на горизонтальной оси. Но это увеличение нелинейно. Если значение предпочтения субъектом стимулов возрастает с увеличением шкального значения по оси монотонно, но нелинейно, то предпочтения могут удовлетворять дистанционной модели, но не могут удовлетворять векторной модели. Аналогично, если предпочтение является убывающей монотонной, но нелинейной функцией шкальных значений стимулов по оси (кривая A на рис. 7.3), то данные субъекта о предпочтении могут удовлетворять одной из дистанционных моделей, но не могут удовлетворять векторной модели.

В дистанционных моделях могут быть криволинейные монотонные функции, такие, как кривые A и D на рис. 7.3. В этих моделях могут быть и одновершинные немонотонные функции предпочтения. Представьте себе супружескую пару, которая хочет иметь двух девочек —

не больше и не меньше. Супруги могут предпочесть семью с нулем девочек семье с одной девочкой; они предпочтут семью с двумя девочками семье с одной девочкой; они предпочтут семью с двумя девочками семье с тремя девочками; они могут предпочесть семью с тремя девочками семье с четырьмя девочками и т. д. Если нарисовать их предпочтения состава семьи как функцию числа девочек в семье, то функция будет увеличиваться от нуля к двум девочкам, достигнет вершины при двух девочках и будет уменьшаться после двух девочек, с увеличением их числа. Функция предпочтения данной супружеской пары будет одновершинной, так как у нее есть один максимум на идеале — семья с двумя девочками. Эта функция не будет монотонной, так как она на части диапазона увеличивается (от нуля к двум девочкам), а на части диапазона уменьшается (от двух девочек к большему числу).

Кривые В и С на рис. 7.3 показывают две одновершинные немонотонные функции предпочтения. Кривая В возрастает в первой части диапазона стимулов, достигает вершины в идеале, представленном точкой *b*, а затем, в дальнейшей части оси, убывает. Кривая С ведет себя аналогично: достигает вершины в идеальной точке *c*, а затем убывает. Кривые А — D на рис. 7.3 иллюстрируют функции предпочтения, согласованные с дистанционными моделями, но не согласованные с векторной моделью: монотонно, нелинейно убывающую (кривая А), одновершинные немонотонные (кривые В и С) и монотонно, но нелинейно возрастающую (кривая D). Векторная модель удовлетворяет только в том случае, когда предпочтения и координаты стимулов линейно связаны по каждой оси.

Векторная модель

В табл. 7.3 приведены данные о предпочтении двух супружеских пар. Эти данные будут использоваться для иллюстрации расчетов, основанных на четырех моделях предпочтения из иерархии Кэрролла. При любом внешнем анализе шкальные значения должны быть известны заранее. В этом примере предположим, что известные шкальные значения по осям — это число девочек и число мальчиков в семье, т. е. предположим, что координатная ось I (столбец 3 табл. 7.3) для каждого стимула — число девочек в составе семьи. Число мальчиков — координатная ось II (столбец 4 табл. 7.3). Столбцы 5—6 показывают гипотетические оценки предпочтений двух супружеских пар (А и В), на которых будет основан наш пример. Большие числа означают меньшие предпочтения стимулов.

Из четырех моделей, описанных Кэрролом [Carroll, 1972], самая простая — векторная модель, предложенная Такером [Tucker, 1960; Bechtel 1976; Bechtel et al., 1971]. Эта модель основана на предложении, что при отсутствии ошибок предпочтения имеют следующий вид:

$$\delta_{is} = \sum_k b_{ks} x_{i,k} + c_s. \quad (7.4)$$

Таблица 7.3. Двумерные координаты стимулов и оценки предпочтений для девяти составов семьи

Стимул		Координата стимулов		Оценки предпочтения	
число девочек	число мальчиков	I	II	субъект А	субъект В
0	0	0,0	0,0	4,1	1,5
0	1	0,0	1,0	2,8	1,0
0	2	0,0	2,0	2,0	0,5
1	0	1,0	0,0	2,8	1,1
1	1	1,0	1,0	2,0	0,0
1	2	1,0	2,0	1,1	1,1
2	0	2,0	0,0	2,0	0,5
2	1	2,0	1,0	0,9	1,0
2	2	2,0	2,0	0,2	1,1

Здесь b_{ks} — вес линейной регрессии, а c_s — аддитивная константа для субъекта s . Уникальная особенность этой модели в том, что предпочтения (δ_{is}) предполагаются линейно связанными со шкальными значениями (x_{ik}) по каждой координатной оси.

Подгонка векторной модели методами множественной регрессии требует отдельного регрессионного анализа данных каждого субъекта. Этот анализ позволяет получить оценки субъективных параметров \hat{b}_{ks} и \hat{c}_s , коэффициент множественной корреляции R_V , служащий мерой соответствия, и F -статистику с K и $(I - K - 1)$ степенями свободы. F -статистика обеспечивает проверку нулевой гипотезы $R_V^2 = 0$ против альтернативы $R_V^2 > 0$. Коэффициент множественной корреляции R_V имеет индекс, V , обозначающий векторную модель, в отличие от мер соответствия в трех оставшихся моделях. R_V^2 равен доли дисперсии в данных о предпочтении субъекта, которая может быть объяснена K координатами стимулов и векторной моделью.

Если координатные оси не коррелированы, то знак субъективного веса указывает, увеличиваются ($\hat{b}_{ks} > 0$) или уменьшаются ($\hat{b}_{ks} < 0$) оценки предпочтений как функции от координаты стимулов k ; абсолютная величина b_{ks} отражает важность координаты k для субъекта s .

В табл. 7.4 показаны веса координат, коэффициенты множественной корреляции и F -статистики, полученные при подгонке векторной модели к данным каждой супружеской пары из табл. 7.3. При координатах из табл. 7.3 векторная модель может объяснить более 90% дисперсии в предпочтениях супружеской пары А. Для пары А оценки весов обеих координат примерно равны ($\hat{b}_{1A} = -0,97$, $\hat{b}_{2A} = -0,93$) и показывают, что предпочтения в целом являются убывающей функцией числа мальчиков и числа девочек. Векторная модель может объяснить очень небольшую долю дисперсии в предпочтениях супружеской пары В ($R_V^2 = 0,03$, $p > 0,10$).

Таблица 7.4. Векторная модель, подогнанная к данным табл. 7.3

Супружеская пара	Оценка субъективных весов		Квадрат множественной корреляции	Статистика $F(z, 0)$ для нулевой гипотезы
	$\hat{\delta}_{1s}$	$\hat{\delta}_{2s}$		
A	-0,97	-0,93	0,99	281,36*
B	-0,07	-0,07	0,03	0,10

* $p < 0,01$

Простая евклидова модель

Согласно простой евклидовой модели, чем больше стимул напоминает идеал субъекта по каждой из осей, тем больше субъекту будет нравиться данный стимул. Все координаты считаются одинаково важными. Это первая из трех моделей, в которых предполагаются нелинейные функции предпочтения, такие, как на рис. 7.3. Согласно модели при отсутствии ошибок предпочтения будут иметь следующий вид:

$$\delta_{is} = \sum_k \omega_s^2 (x_{ik} - x_{sk})^2 + c_s^* \quad (7.5)$$

Подгонка модели к данным субъекта позволяет получить оценки координат идеальной точки \hat{x}_{sk} , оценку субъективного веса $\hat{\omega}_s^2$ и коэффициент множественной корреляции R_E , служащий мерой соответствия. Мера соответствия для простой евклидовой модели в этой главе имеет индекс E в отличие от мер соответствия для других моделей внешнего анализа. Для проверки нулевой гипотезы $R_E^2 = 0$ против альтернативы $R_E^2 > 0$ можно применить F -статистику с $K + 1$ и $I - K - 2$ степенями свободы. Поскольку простая евклидова модель включает как частный случай векторную модель (см. обсуждение формул (7.12) — (7.16)), можно также использовать F -статистику с 1 и $(I - K - 2)$ степенями свободы. Если простая евклидова модель подогнана к данным, то она может служить и для проверки нулевой гипотезы $R_E^2 = R_V^2$ против альтернативы $R_E^2 > R_V^2$. Если в последнем случае F -статистика ведет к отклонению нулевой гипотезы, то можно сделать вывод, что простая евклидова модель объясняет значительно большую долю дисперсии в предпочтениях субъекта s , чем векторная модель. Более того, отклонение подтверждает вывод, что предпочтения нелинейно связаны с некоторыми координатами стимулов.

В табл. 7.5 приведены статистики, полученные при подгонке к данным из табл. 7.3 простой евклидовой модели. Столбцы 5 ($R_E^2 = 0,99$) и 6 табл. 7.5 показывают, что простая евклидова модель очень хорошо подогнана к данным супружеской пары А*. Однако при использовании любого из общепринятых уровней значимости статистика в столбце 7 показывает, что эта модель не объясняет значимо большей доли дисперсии, чем векторная модель. Ничего в этом анализе не указывает на нелинейную связь между координатами стимулов и предпочтением супружеской пары А.

Т а б л и ц а 7 5 Простая евклидова модель, подогнанная к данным табл. 7.3

Супружеская пара	Оценка веса	Оценки идеальных точек		Квадрат множественной корреляции R_E^2	Нулевые гипотезы, F-статистики	
	$\hat{\omega}_s$	\hat{x}_{s1}	\hat{x}_{s2}		$R_E^2 = 0$ $F_{(3,5)}$	$R_E^2 = R_V^2$ $F_{(1,5)}$
А	0,08	7,06	6,88	0,99	206,15*	1,58
В	0,25	1,13	1,13	0,19	0,38	0,95

* $p < 0,01$

Простая евклидова модель плохо соответствует данным пары В ($R_E^2 = 0,19$, $F_{(3,5)} = 0,38$, $p > 0,10$). Оценка идеальной точки этой пары ($\hat{x}_{B1} = \hat{x}_{B2} = 1,13$) показывает, что в идеале супруги предпочтут семью с одним мальчиком и одной девочкой. Обычно из оценок параметров не делают выводов, которые не соответствуют данным субъекта, поскольку такие оценки параметров могут быть неверными. Выводы относительно пары В были сделаны только для иллюстрации.

Взвешенная евклидова модель

Третья модель в иерархии Кэрролла [Carroll, 1972] — взвешенная евклидова модель. Простая евклидова модель и взвешенная евклидова модель различаются только тем, что в первой — единый вес ω_s для всех координатных осей, а во второй — у каждой оси свой собственный вес ω_{ks} . Иными словами, в простой евклидовой модели предполагается, что веса всех координатных осей одинаковы. Взвешенная евклидова модель допускает различные веса координатных осей. Согласно взве-

* Подгонка к данным супружеских пар А и В неметрической формы простой евклидовой модели с помощью программы PARSUN приводит к аналогичным результатам: к данным пары А ее удается подогнать хорошо, а к данным пары В — плохо. — *Примеч. пер.*

шенной евклидовой модели предпочтения при отсутствии ошибок имеют следующую форму:

$$\delta_{is} = \sum_k \omega_{ks}^2 (x_{ik} - x_{sk})^2 + c_s^* \quad (7.6)$$

За исключением показателя степени $\frac{1}{2}$ в правой части (6.4) и аддитивной константы c_s^* в (7.6), взвешенная евклидова модель для предпочтений (7.6) очень похожа на взвешенную евклидову модель для данных о различии (6.4). Взвешенная евклидова модель (7.6) включает простую евклидову модель (7.5) и векторную модель (7.4) как частные случаи.

Подгонка взвешенной евклидовой модели к данным субъекта позволяет получить оценки координат идеальных точек $\widehat{x}_{s,k}$, оценки субъективных весов $\widehat{\omega}_{ks}$ и коэффициент множественной корреляции R_W , служащий мерой соответствия. Индекс W отличает меру соответствия взвешенной евклидовой модели R_W от мер соответствия других моделей. Для проверки нулевой гипотезы $R_W^2 = 0$ против альтернативы $R_W^2 > 0$ можно построить F — статистику с $2K$ и $I - 2K - 1$ степенями свободы. Поскольку взвешенная евклидова модель включает как частные случаи векторную модель и простую евклидову модель, для сравнения взвешенной евклидовой модели с векторной и простой евклидовой моделями можно использовать две другие F -статистики.

Первая из этих двух статистик имеет $K - 1$ и $I - 2K - 1$ степеней свободы и может быть использована для проверки нулевой гипотезы $R_W^2 = R_E^2$ против альтернативы $R_W^2 > R_E^2$. Если эта статистика ведет к отклонению нулевой гипотезы, то можно сделать вывод, что взвешенная евклидова модель лучше соответствует данным, чем простая евклидова модель. Более того, отклонение нулевой гипотезы позволяет прийти к заключению, что веса ω_{ks} всех K координат у субъекта s не равны.

Вторая F -статистика для сравнения моделей имеет K и $I - 2K - 1$ степеней свободы. Если взвешенная евклидова модель подогнана к данным, то ее можно применять для проверки нулевой гипотезы $R_W^2 = R_V^2$ против альтернативы $R_W^2 > R_V^2$. Если эта статистика ведет к отклонению нулевой гипотезы, то можно сделать вывод, что взвешенная евклидова модель лучше соответствует данным субъекта s , чем векторная модель. Более того, предпочтения нелинейно связаны с координатами по одной из осей.

В табл. 7.6 приведены различные статистики, полученные при подгонке взвешенной евклидовой модели к данным табл. 7.3. Столбцы 6 и 7 табл. 7.6 показывают, что взвешенная евклидова модель хорошо соответствует данным супружеской пары А. Однако при использовании любого общепринятого уровня значимости из столбцов 8 и 9 можно сделать вывод, что взвешенная евклидова модель не объясняет значимо большей доли дисперсии в оценках этой пары, чем простая евкли-

Таблица 7.6. Взвешенная евклидова модель, подогнанная к данным табл. 7.3

Супружеская пара	Оценки весов		Оценки идеальных точек		Квадрат множественной корреляции R_w^2	Нулевые гипотезы, F -статистики		
	\hat{w}_{1s}^2	\hat{w}_{2s}^2	\hat{x}_{s1}	\hat{x}_{s2}		$R_W^2 = 0$, $F(4,4)$	$R_W^2 = R_E^2$, $F(1,4)$	$R_W^2 = R_V^2$, $F(2,4)$
A	0,03	0,13	17,17	4,62	0,99	139,77*	0,00	0,00
B	0,20	0,30	1,17	1,11	0,19	0,24	0,00	0,40

* $p < 0,01$.

дова или векторная модели. Так как нулевая гипотеза $R_W^2 = R_V^2$ не может быть отклонена, у нас нет причин считать, что функция, связывающая предпочтения пары с координатами стимулов, является нелинейной. F -статистика в столбце 7 показывает, что ограничение равных весов простой евклидовой модели не ведет к значительному уменьшению соответствия данных супружеской пары А этой модели.

Взвешенная евклидова модель может объяснить только 19% дисперсии в оценках супружеской пары В. И в этом случае оценка идеальной точки показывает, что супруги предпочтут семью с одним мальчиком и одной девочкой.

Обобщенная евклидова модель

Наиболее общей дистанционной моделью в иерархии Кэрролла [Carroll, 1972] является трехмодальная модель Такера [Tucker, 1972], расширенная для данных о предпочтении. Эту модель мы приведем в виде, отличном от описанного Кэрролом [Carroll, 1972]. Модель основана на предположении, что у каждого субъекта существует диагональная матрица весов W_s и $K \times K$ -матрица преобразования T_s с векторами-строками единичной длины. Применение этих матриц к координатной матрице X позволяет получить новую координатную матрицу X_s для субъекта s :

$$X_s = XW_s T_s. \quad (7.7)$$

Согласно этой модели предпочтения при отсутствии ошибок имеют следующий вид:

$$\bar{d}_{is} = \sum_k (x_{iks} - x_{shs})^2 + c_s^*. \quad (7.8)$$

В (7.8) x_{i,k_s} — координата стимула i по оси k в X_s . Аналогично x_{s,k_s} — идеальная точка субъекта s по той же оси.

Формула (7.8) — это запись обобщенной евклидовой модели в координатах стимулов и идеальных точек в собственном пространстве субъекта s . Можно показать, что при подстановке в (7.8) элементов первоначальной матрицы координат стимулов X получим:

$$\delta_{i,s} = \sum_k \omega_{k_s}^2 (x_{i,k} - x_{s,k})^2 + \sum_{(k,k')} \omega_{k_s} \omega_{k'_s} r_{kk's} (x_{i,k} - x_{s,k}) (x_{i,k'} - x_{s,k'}) + c_s^* \quad (7.9)$$

За исключением слагаемых в правой части (7.9), выражающих взаимодействие между осями k и k' , (7.9) ничем не отличается от взвешенной евклидовой модели (7.6). За исключением показателя степени $\frac{1}{2}$ в правой части (6.22), обобщенная евклидова модель для предпочтений (7.9) аналогична трехмодальной модели (6.22) для данных о различии. Такое единство обусловлено тем, что в моделях предполагается наличие взаимодействия между координатами. Знак и абсолютная величина $r_{kk's}$ в (7.9) характеризуют, собственно, направление и величину взаимодействия между осями k и k' в оценках субъекта s .

Обобщенная евклидова модель включает в качестве частных случаев все три предыдущие модели — векторную, простую евклидову и взвешенную евклидову. Если $r_{kk's} = 0$ для всех пар осей, то в правой части (7.9) соответствующие слагаемые исчезают и (7.9) становится идентичной взвешенной евклидовой модели (7.6). Если, кроме того, субъективные веса всех K осей одинаковы (т. е. $\omega_{k_s}^2 = \omega_s^2$ для всех осей), то обобщенная евклидова модель сводится к простой евклидовой модели (7.5). Доказательство того, что обобщенная евклидова модель включает как частный случай векторную модель, отложим до следующего параграфа.

Подгонка обобщенной евклидовой модели дает оценки субъективных весов координат $\hat{\omega}_{k_s}^2$, оценки координат идеальных точек $\hat{x}_{s,k}$, оценки субъективных параметров взаимодействия $\hat{r}_{kk's}$ и коэффициент множественной корреляции R_G , служащий мерой соответствия. Мера соответствия R_G для обобщенной евклидовой модели имеет индекс G в отличие от мер соответствия других моделей. Для проверки нулевой гипотезы $R_G^2 = 0$ против альтернативы $R_G^2 > 0$ можно использовать F -статистику с $\frac{1}{2} K(K+3)$ и $I - \frac{1}{2} K(K+3) - 1$ степенями свободы.

Для сравнения обобщенной евклидовой модели с тремя другими моделями можно построить и другие F -статистики. Если обобщенная евклидова модель подогнана к данным, то для проверки нулевой гипотезы $R_G^2 = R_W^2$ против альтернативы $R_G^2 > R_W^2$ существует F -статистика с $\frac{1}{2} K(K-1)$ и $I - \frac{1}{2} K(K+3) - 1$ степенями свободы.

Отклонение нулевой гипотезы приводит к предположению, что из параметров взаимодействия $r_{kk's}$ по крайней мере один не равен нулю.

Вторая F -статистика, используемая для проверки нулевой гипотезы $R_G^2 = R_E^2$ против альтернативы $R_G^2 > R_E^2$, если обобщенная евклидова модель подогнана к данным, имеет $\frac{1}{2} K(K+1) - 1$ и $I - \frac{1}{2} K(K+3) - 1$ степеней свободы. Отклонение этой нулевой гипотезы показывает, что обобщенная евклидова модель объясняет значительно большую долю дисперсии в оценках субъекта s , чем простая евклидова модель, поскольку она содержит слагаемые взаимодействия или веса координатных осей предполагаются неравными.

Третья статистика, которую после подгонки к данным обобщенной евклидовой модели можно использовать для проверки нулевой гипотезы $R_G^2 = R_V^2$ против альтернативы $R_G^2 > R_V^2$, имеет $\frac{1}{2} K(K+1)$ и $I - \frac{1}{2} K(K+3) - 1$ степеней свободы. Отклонение этой нулевой гипотезы показывает, что обобщенная евклидова модель объясняет значимо большую долю дисперсии, чем векторная модель, из-за взаимодействий между координатами или из-за того, что оценки субъекта s нелинейны.

В табл. 7.7. приведены различные статистики, полученные путем подгонки обобщенной евклидовой модели к данным табл. 7.3. Обобщенная евклидова модель очень хорошо соответствует данным супружеской пары А ($R_G^2 = 0,99$, $p < 0,01$). Однако столбцы 9—11 показывают, что она не соответствует данным этой пары значимо лучше, чем три предыдущие модели. Как и прочие модели, обобщенная евклидова модель не объясняет значительной части дисперсии в оценках супружеской пары В ($R_G^2 = 0,59$, $p > 0,10$). И в этом случае оценка идеальной точки супругов показывает, что они более всего предпочитают семью с одним мальчиком и одной девочкой.

Таблица 7.7. Обобщенная евклидова модель, подогнанная к данным табл. 7.3

Супружеская пара	Параметры взаимодействия \hat{r}_{12s}	Оценки весов		Оценки идеальных точек		Квадрат множественной корреляции R_G^2
		\hat{w}_{1s}^2	\hat{w}_{2s}^2	\hat{x}_{s1}	\hat{x}_{s2}	
А	0,60	0,03	0,13	16,69	0,09	0,99
В	0,82	0,20	0,30	1,17	1,00	0,59

Супружеская пара	Нулевые гипотезы, F-статистики			
	$R_G^2 = 0, F_{(5,3)}$	$R_G^2 = R_W^2, F_{(1,3)}$	$R_G^2 = R_E^2, F_{(2,3)}$	$R_G^2 = R_V^2, F_{(3,3)}$
A	118,24*	1,22	0,88	1,09
B	0,86	2,88	1,46	1,35

* $p < 0,01$.

Интерпретация оценок параметров

Для того чтобы оценки параметров $\hat{x}_{s,h}$ можно было интерпретировать как идеальную точку, соответствующие оценки весов $\hat{w}_{k,s}^2$ должны быть положительными. В алгоритме Кэррола такое ограничение на веса не накладывается, и иногда они на самом деле оказываются отрицательными. При $\hat{w}_{k,s}^2 < 0$ Кэррол предлагает интерпретировать оценку координаты субъекта $\hat{x}_{s,h}$ как «антиидеальную» точку. Чем меньше стимул напоминает «антиидеальную» точку, тем больше он нравится. В работах [Davison, 1976; Srinivasan and Shocker, 1973] авторы выражают сомнение по поводу соответствия «антиидеальной» модели какому-либо реальному психологическому процессу формирования предпочтений относительно большинства стимулов. Если «антиидеальная» интерпретация точки кажется невозможной, то следует скептически оценивать статистики, полученные путем подгонки евклидовой модели, приведшей к отрицательной оценке.

Делать выводы относительно субъекта или относительно его оценок параметров по модели, которая не соответствует данным, — весьма сомнительная практика. Поскольку ни одна из приведенных выше моделей не объясняет стратегии супружеской пары В, следует избегать выводов, основанных на оценках параметров, полученных при подгонке этих моделей к данным.

Как мы видели в приведенных примерах, число оцениваемых параметров с каждой следующей моделью увеличивается, а при увеличении их числа они становятся все менее стабильными. Если более общая модель недостаточно хорошо соответствует данным, то мало оснований для выводов относительно субъекта при менее стабильных оценках. Более стабильные оценки параметров менее общей модели, которая достаточно хорошо соответствует данным, позволяют сделать адекватные выводы. Например, ни одна модель, кроме векторной, не объясняет значительно большей доли дисперсии в оценках супружеской пары А. Поэтому допустимо делать выводы относительно этой пары на основе оценок параметров векторной модели.

При интерпретации оценок параметров дистанционной модели следует иметь в виду еще один момент. Если оценка идеальной точки субъекта лежит вне диапазона стимулов по оси k , то предпочтение субъекта — монотонная функция значений оси k , а не одноворшинная немонотонная функция. Предполагая оценки весов положительными, $\hat{w}_{ks}^2 > 0$, в случае, когда $\hat{x}_{s,k}$ меньше диапазона стимулов, можно считать, что эта функция монотонно убывающая. С другой стороны, значение $\hat{x}_{s,k}$, которое больше диапазона стимулов, требует предположения, что функция монотонно возрастающая. Например, в табл. 7.6 обе оценки координат идеальной точки для супружеской пары А, $\hat{x}_{A1} = 17,17$ и $\hat{x}_{A2} = 4,62$, лежат вне диапазона стимулов. Шкальные значения стимулов по обеим осям находятся в диапазоне от 1,00 до 3,00. Поскольку веса координат положительны, $\hat{w}_{1A}^2 = 0,03$ и $\hat{w}_{2A}^2 = 0,13$, расположение оценок координат идеальной точки справа от диапазона стимулов ведет к предположению, что предпочтения этой супружеской пары являются монотонными функциями от координат стимулов по обеим осям, по крайней мере в пределах используемого в исследовании диапазона стимулов.

Все оценки параметров во внешнем анализе — регрессионные веса или выведены из регрессионных весов. В [Cohen, 1968] указано, что интерпретация регрессионных весов очень сложна, когда входные переменные (в нашем примере координаты стимулов) коррелированы. Комментарии автора указанной работы применимы также и к оценкам параметров при внешнем анализе.

Даже в случае, когда одна из приведенных выше моделей полностью соответствует данным, ее можно считать только параметрической моделью для оценок предпочтений [Hammond, 1964]. Соответствие модели данным означает, что предсказанные моделью оценки близки к фактическим оценкам предпочтений. Однако это не значит, что подразумеваемый в модели процесс, т. е. сравнение воспринимаемых признаков стимулов с идеалом, аналогичен процессу, с помощью которого субъекты дают свои оценки. Статистика соответствия указывает, как модель может приблизить оценки субъекта, но не то, как модель описывает сам процесс оценивания.

ПОДГОНКА ВНЕШНИХ МОДЕЛЕЙ

Поскольку векторная модель (7.4)

$$\delta_{is} = \sum_k b_{ks} x_{ik} + c_s \quad (7.10)$$

— линейная функция координат стимулов x_{ik} , для подгонки модели можно применять стандартные методы множественной регрессии. Процедура требует проведения одного расчета методом регрессионного анализа

для каждого субъекта. I наблюдений по выходной (зависимой) переменной — это I оценок предпочтений субъекта s . I наблюдений по K входным переменным — это I шкальных значений стимулов по K координатным осям.

В столбце 1 табл. 7.8 приведены оценки предпочтений супружеской пары А из табл. 7.3. В столбцах 2 и 3 содержатся шкальные значения стимулов из той же таблицы. Эти данные, взятые вместе, служат основой для подгонки векторной модели к данным о предпочтении супружеской пары А. Строка в нижней части табл. 7.8, обозначенная как «Векторная», содержит регрессионные веса двух входных переменных: $\hat{b}_{1A} = -0,97$, $\hat{b}_{2A} = -0,93$. Эти же оценки приведены в табл. 7.4. F -статистика с K и $I - K - 1$ степенями свободы для проверки нулевой гипотезы $R_V^2 = 0$ против альтернативы $R_V^2 > 0$ выглядит так:

$$F = \frac{R_V^2}{1 - R_V^2} \cdot \frac{I - K - 1}{K}. \quad (7.11)$$

Таблица 7.8 Данные, использованные во внешнем анализе предпочтений супружеской пары А, и полученные регрессионные веса

Выходная переменная δ_{is}	Входные переменные					
	x_{i1}	x_{i2}	$(x_{i1}^2 + x_{i2}^2)$	x_{i1}^2	x_{i2}^2	$x_{i1} x_{i2}$
4,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2,8	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0
2,0	0,0	2,0	4,0	0,0	4,0	0,0
2,8	1,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0
2,0	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0	1,0
1,1	1,0	2,0	5,0	1,0	4,0	2,0
2,0	2,0	0,0	4,0	4,0	0,0	0,0
0,9	2,0	1,0	5,0	4,0	1,0	2,0
0,2	2,0	2,0	8,0	4,0	4,0	4,0

Регрессионный вес*

Модель	\hat{b}_{1A}	\hat{b}_{2A}	\hat{b}_{3A}	\hat{b}_{4A}	\hat{b}_{5A}	\hat{b}_{6A}
Векторная	-0,97	-0,93				
Простая евклидова	-1,13	-1,10	0,08			
Взвешенная евклидова	-1,03	-1,20		0,03	0,13	
Обобщенная евклидова	-1,11	-1,28		0,03	0,13	0,075

* Пробел означает, что эта переменная в модель не входит.

Для супружеской пары А $R_V^2 = 0,98945$, $K = 2$, $I = 9$. Подставляя эти числа в (7.11), получим $F_{(2,6)} = 281,36$, что и приведено в табл. 7.4.

Простая евклидова модель

Согласно простой евклидовой модели (7.5) предпочтения при отсутствии ошибок имеют следующую форму:

$$\delta_{is} = \sum_k \omega_s^2 (x_{ik} - x_{sk})^2 + c_s^*. \quad (7.12)$$

Возводя выражение в скобках в квадрат и изменяя порядок слагаемых, получим

$$\delta_{is} = \omega_s^2 \sum_k x_{ik}^2 + \sum_k (-2\omega_s^2 x_{sk} x_{ik}) + \sum_k \omega_s^2 x_{sk}^2 + c_s^*. \quad (7.13)$$

Обозначив

$$c_s = \sum_k \omega_s^2 x_{sk}^2 + c_s^*, \quad (7.14)$$

$$b_{ks} = -2\omega_s^2 x_{sk} \quad (7.15)$$

и подставив эти выражения в (7.13), будем иметь

$$\delta_{is} = \omega_s^2 \sum_k x_{ik}^2 + \sum_k b_{ks} x_{ik} + c_s. \quad (7.16)$$

Отсюда видно, что простая евклидова модель в виде (7.16) становится идентичной векторной модели (7.10), когда $\omega_s = 0$, т. е. простая евклидова модель включает как частный случай векторную модель. Выражение (7.16) является линейной функцией $K + 1$ переменных: K координат стимулов x_{ik} и $K + 1$ -й переменной $\sum_k x_{ik}^2$. Таким образом, простая евклидова модель может быть подогнана к предпочтениям субъекта s методом множественной регрессии с $K + 1$ независимыми переменными. И здесь I оценок предпочтений δ_{is} служат I наблюдениями выходной (зависимой) переменной. Переменная $\sum_k x_{ik}^2$ и K координат стимулов x_{ik} служат входными (независимыми) переменными.

Оценка по методу наименьших квадратов величины ω_s^2 — это просто регрессионный вес переменной $\sum_k x_{ik}^2$. Решая (7.15) относительно координат идеальной точки x_{sk} , получим, что разумная оценка x_{sk} следующая:

$$\widehat{x}_{sk} = \frac{\widehat{b}_{ks}}{-2\widehat{\omega}_s^2}. \quad (7.17)$$

Здесь \widehat{b}_{ks} — регрессионный вес входной переменной x_{ik} .

В столбцах 1—4 табл. 7.8 приведены выходная и входные переменные, использованные при подгонке к данным супружеской пары А простой евклидовой модели. Строка «Простая евклидова» содержит тро

регрессионных веса, полученных в процессе анализа. Вес в столбце 4 входной переменной $\sum_b x^2_{ih}$ равен оценке w^2_i , $\widehat{w^2_i} = 0,08$, приведенной для пары А в табл. 7.5. Оценки идеальной точки супружеской пары А в табл. 7.5 могут быть получены из оценок регрессионных весов в табл. 7.8 с использованием (7.17). Например, оценка первой координаты идеальной точки, $\widehat{x}_{A1} = 7,06$, в табл. 7.5 равна: $\widehat{b}_{1A}/(-2\widehat{w^2_A}) = -1,13 / \{(-2)(0,08)\} = 7,06$. F-статистика с $K + 1$ и $I - K - 2$ степенями свободы для проверки нулевой гипотезы $R^2_E = 0$ против альтернативы $R^2_E > 0$ равна:

$$F = \frac{R^2_E}{1 - R^2_E} \cdot \frac{I - K - 2}{K + 1}. \quad (7.18)$$

Подставляя в (7.18) значение для супружеской пары А $R^2_E = 0,99198$, получим $F_{(3,5)} = 206,15$, что и приведено в табл. 7.5.

Если простая евклидова модель подоғнана к данным, то существует F-статистика с 1 и $I - K - 2$ степенями свободы для проверки нулевой гипотезы $R^2_E = R^2_V$ против альтернативы $R^2_E > R^2_V$. Эта статистика имеет вид:

$$F = \frac{R^2_E - R^2_V}{1 - R^2_E} \cdot (I - K - 2). \quad (7.19)$$

Подставляя в это выражение значения для супружеской пары А $R^2_E = 0,99198$, $R^2_V = 0,98945$, $I = 9$, $K = 2$, получим $F_{(1,5)} = 1,58$, что и приведено в табл. 7.5.

Взвешенная евклидова модель

Согласно взвешенной евклидовой модели (7.6), предпочтения при отсутствии ошибок имеют следующий вид:

$$\delta_{is} = \sum_k w^2_{ks} (x_{ik} - x_{sk})^2 + c_s^*. \quad (7.20)$$

Возводя выражение в скобках в квадрат и переупорядочивая слагаемые, получим

$$\delta_{is} = \sum_k w^2_{ks} x^2_{ik} + \sum_k (-2w^2_{ks} x_{sk} x_{ik}) + \sum_k w^2_{ks} x^2_{sk} + c_s^*. \quad (7.21)$$

Обозначив

$$c_s = \sum_k w^2_{ks} x^2_{sk} + c_s^*, \quad (7.22)$$

$$b_{ks} = -2w^2_{ks} x_{sk} \quad (7.23)$$

и подставив эти выражения в (7.21), получим

$$\delta_{is} = \sum_k w^2_{ks} x^2_{ik} + \sum_k b_{ks} x_{ik} + c_s. \quad (7.24)$$

Если для всех k ω_{ks}^2 равно константе ω_s^2 , то взвешенная евклидова модель (7.24) сводится к простой евклидовой модели (7.16). Это означает, что взвешенная евклидова модель включает как частный случай простую евклидову модель. Поскольку простая евклидова модель включает как частный случай векторную модель, взвешенная евклидова модель также включает ее.

Выражение (7.24) является линейной функцией $2K$ входных переменных, K переменных x_{ik}^2 и K переменных x_{ik} . Поэтому взвешенная евклидова модель может быть подогнана к данным о предпочтении субъекта s методом множественной регрессии с $2K$ входными переменными. I оценок предпочтений δ_{is} служат I наблюдениями зависимой переменной. Координаты стимулов x_{ik} и квадраты координат стимулов x_{ik}^2 служат $2K$ независимыми переменными.

Оценки методом наименьших квадратов ω_{ks}^2 — это просто K регрессионных весов входных переменных x_{ik}^2 . Решая (7.23) относительно x_{sk} , приходим к выводу, что разумную оценку координаты идеальной точки \hat{x}_{sk} можно найти из $\hat{\omega}_{ks}^2$ и оценок регрессионных весов \hat{b}_{ks} входных переменных x_{ik} :

$$\hat{x}_{sk} = \frac{\hat{b}_{ks}}{-2\hat{\omega}_{ks}^2}. \quad (7.25)$$

В столбцах 1—3 и 5—6 табл. 7.8 показаны выходная и входные переменные, использованные для подгонки взвешенной евклидовой модели к предпочтениям супружеской пары А. Строка «Взвешенная евклидова» содержит полученные в процессе анализа регрессионные веса. Оценки регрессионных весов в столбцах 5 и 6, $\hat{b}_{4A} = 0,03$ и $\hat{b}_{5A} = 0,13$, для входных переменных x_{i1}^2 и x_{i2}^2 совпадают с приведенными в табл. 7.6 оценками весов, $\hat{\omega}_{1A}^2 = 0,03$ и $\hat{\omega}_{2A}^2 = 0,13$. Оценки идеальной точки в табл. 7.6 найдены из оценок регрессионных весов $\hat{b}_{1A} = -1,03$ и $\hat{b}_{2A} = -1,20$ в табл. 7.8 по формуле (7.25). Например, $\hat{x}_{A1} = 17,17$ в табл. 7.6 — это просто $\hat{b}_{1A}/(-2\hat{\omega}_{1A}^2)$, что равно: $-1,03/[-2(0,03)] = 17,17$. F -статистика с $2K$ и $I - 2K - 1$ степенями свободы для нулевой гипотезы $R_W^2 = 0$ равна:

$$F = \frac{R_W^2}{1 - R_W^2} \cdot \frac{I - 2K - 1}{2K}. \quad (7.26)$$

F -статистика с $K - 1$ и $I - 2K - 1$ степенями свободы для нулевой гипотезы $R_W^2 = R_E^2$ такова:

$$\bar{F} = \frac{R_W^2 - R_E^2}{1 - R_W^2} \cdot \frac{I - 2K - 1}{K - 1}. \quad (7.27)$$

Наконец, F -статистика с K и $I - 2K - 1$ степенями свободы для нулевой гипотезы $R_W^2 = R_V^2$ будет следующей:

$$F = \frac{R_W^2 - R_V^2}{1 - R_W^2} \cdot \frac{I - 2K - 1}{K}. \quad (7.28)$$

*** Обобщенная евклидова модель**

Согласно обобщенной евклидовой модели (7.9), предпочтения при отсутствии ошибок имеют вид:

$$\delta_{is} = \sum_k \omega_{ks}^2 (x_{ih} - x_{sh})^2 + \sum_{(k, k' \neq k)} \omega_{ks} \omega_{k's} r_{kk's} (x_{ih} - x_{sh}) (x_{ik'} - x_{sk'}) + C_s^*. \quad (7.29)$$

Проведя умножение в скобках и переупорядочивая слагаемые, получим

$$\begin{aligned} \delta_{is} = & \sum_k \omega_{ks}^2 x_{ik}^2 + \sum_k (-2\omega_{ks}^2 x_{ih} x_{sh}) + \sum_k \omega_{ks}^2 x_{sk}^2 + \\ & + \sum_{(k, k' \neq k)} \omega_{ks} \omega_{k's} r_{kk's} x_{ih} x_{ik'} + \\ & + \sum_{(k, k' \neq k)} (-2\omega_{ks} \omega_{k's} r_{kk's} x_{ih} x_{sk'}) + \\ & + \sum_{(k, k' \neq k)} \omega_{ks} \omega_{k's} r_{kk's} x_{sh} x_{sk'} + C_s^*. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Пусть

$$C_s = \sum_k \omega_{ks}^2 x_{sk}^2 + \sum_{(k, k' \neq k)} \omega_{ks} \omega_{k's} r_{kk's} x_{sh} x_{sk'} + C_s^*, \quad (7.31)$$

$$b_{hs} = -2\omega_{ks}^2 x_{sh} - 2 \sum_{(k' \neq k)} \omega_{ks} \omega_{k's} r_{kk's} x_{sk'} \quad (7.32)$$

и

$$b_{kk's} = 2\omega_{hs} \omega_{k's} r_{kk's}. \quad (7.33)$$

В матричных обозначениях (7.32) будет выглядеть так:

$$b_s = -2R_s x_s, \quad (7.34)$$

где b_s — вектор-столбец $K \times 1$, содержащий элементы b_{hs} , X_s — вектор-столбец $K \times 1$, содержащий элементы x_{sh} , а R_s — симметрическая матрица $K \times K$ с k -м диагональным элементом ω_{ks}^2 и элементом $\omega_{hs} \omega_{k's} r_{kk's}$ в строке k , столбце k' .

Подставляя (7.31) и (7.33) в (7.30), получим

$$\delta_{is} = \sum_k \omega_{ks}^2 x_{ik}^2 + \sum_k b_{hs} x_{ih} + \sum_{(k, k' < k)} b_{kk's} x_{ih} x_{ik'} + C_s. \quad (7.35)$$

Если $r_{kk's} = 0$ для всех пар координат $(k, k' \neq k)$, то (7.35) сводится к взвешенной евклидовой модели (7.24). Таким образом, обобщенная евклидова модель (7.35) включает как частный случай взвешенную евклидову модель (7.24). Поскольку взвешенная евклидова модель включает как частные случаи простую евклидову и векторную модели, обобщенная евклидова модель также включает их.

Формула (7.35) — это линейное уравнение от $\frac{1}{2} K(K+3)$ независимых переменных: K переменных $x_{ik}^2 + K$ переменных $x_{ik} + \frac{1}{2} K(K-1)$ переменных $x_{ik}x_{ik'}$, $(k, k' < k)$. Обобщенная евклидова модель может быть подогнана к предпочтениям субъекта s с помощью регрессионного анализа с $\frac{1}{2} K(K+3)$ входными переменными. I оценок предпочтений δ_{is} служат I наблюдениями зависимой переменной. В качестве независимых переменных берутся K координат стимулов x_{ik} , K квадратов координат стимулов x_{ik}^2 и $\frac{1}{2} K(K-1)$ произведений координат $x_{ik}x_{ik'}$, $(k, k' < k)$.

Оценки по методу наименьших квадратов ω_{ks}^2 — это просто K регрессионных весов входных переменных x_{ik}^2 . Решая (7.33) относительно $r_{kk's}$, получим, что разумная оценка величины $r_{kk's}$ такова:

$$\widehat{r}_{kk's} = \frac{\widehat{b}_{kk's}}{2\widehat{\omega}_{ks}\widehat{\omega}_{k's}}, \quad (7.36)$$

где $\widehat{b}_{kk's}$ — регрессионный вес переменной-произведения $x_{ik}x_{ik'}$. Аналогично, решая (7.34) относительно x_s , придем к выводу, что

$$\widehat{x}_s = -\frac{1}{2} \widehat{R}_s^{-1} \widehat{b}_s \quad (7.37)$$

является оценкой вектора-столбца $K \times 1$ координат идеальной точки \widehat{x}_{sk} . \widehat{R}_s^{-1} содержит оценку $\widehat{\omega}_{ks}^2$ в качестве k -го диагонального элемента; внедиагональный элемент в строке k , столбец k' , равен $\frac{1}{2} \widehat{b}_{kk's}$, если $k' < k$, или $\frac{1}{2} \widehat{b}_{k'ks}$, если $k' > k$.

В столбцах 1—3 и 5—7 табл. 7.8 приведены выходная и входные переменные, использованные при подгонке обобщенной евклидовой модели к данным о предпочтениях супружеской пары А. Строка «Обобщенная евклидова» содержит пять полученных в процессе анализа регрессионных весов. Регрессионные веса из столбцов 5 и 6 табл. 7.8 0,03 и 0,13 — это оценки субъективных весов $\widehat{\omega}_{1A}^2 = 0,03$ и $\widehat{\omega}_{2A}^2 = 0,13$ для супружеской пары А, приведенные в табл. 7.7. Оценка параметра взаимодействия в табл. 7.8, $\widehat{r}_{kk's} = 0,60$, может быть получена под-

становкой оценок регрессионных весов из столбцов 5—7 табл. 7.8 в (7.36):

$$\widehat{r_{kk's}} = \frac{0,075}{2 [(0,03) (0,13)]^{1/2}} = 0,60.$$

Так из регрессионных весов строятся

$$\widehat{R}_s = \begin{bmatrix} 0,03 & 0,04 \\ 0,04 & 0,13 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

и

$$\widehat{b}_s = \begin{bmatrix} -1,11 \\ -1,28 \end{bmatrix}. \quad (7.39)$$

Обращая \widehat{R}_s , получим

$$\widehat{R}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 44,64 & -12,62 \\ -12,62 & 11,11 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

Подставляя (7.39) и (7.40) в (7.37), получим

$$\widehat{X}_s = \begin{bmatrix} 16,69 \\ 0,09 \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

оценки координат идеальной точки, приведенные в табл. 7.7.

F -статистики для проверки нулевых гипотез $R_G^2 = 0$, $R_G^2 = R_W^2$, $R_G^2 = R_E^2$ и $R_G^2 = R_V^2$ равны соответственно:

$$F = \frac{R_G^2}{1 - R_G^2} \cdot \frac{I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1}{\frac{1}{2} K (K + 3)}, \quad (7.42)$$

$$F = \frac{R_G^2 - R_W^2}{1 - R_G^2} \cdot \frac{I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1}{\frac{1}{2} K (K - 1)}, \quad (7.43)$$

$$F = \frac{R_G^2 - R_E^2}{1 - R_G^2} \cdot \frac{I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1}{\frac{1}{2} K (K + 1) - 1}, \quad (7.44)$$

$$F = \frac{R_G^2 - R_V^2}{1 - R_G^2} \cdot \frac{I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1}{\frac{1}{2} K (K + 1)}. \quad (7.45)$$

F -статистики (7.42)—(7.45) имеют соответственно $\frac{1}{2} K (K + 3)$ и $I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1$, $\frac{1}{2} K (K - 1)$ и $I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1$, $\frac{1}{2} K (K + 1) - 1$ и $I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1$, $\frac{1}{2} K (K + 1)$ и $I - \frac{1}{2} K (K + 3) - 1$ степеней свободы.

ПРИМЕР

В исследовании [Jones and Young, 1972], обсуждавшемся в гл. 6, сделан вывод, что лица, находящиеся рядом в трехмерном представлении воспринимаемой структуры социальной группы, более склонны к взаимодействию. Это наводит на мысль применять дистанционную модель для анализа данных о социометрическом предпочтении*. В [Davison and Jones, 1976] предпринято такое исследование. Авторы приводят данные из [Jones and Young, 1972]. По целому ряду теоретических причин исследуется евклидова модель социометрических предпочтений. Согласно гипотезе о сходстве-привлекательности [Вугпе, 1971] у людей сильнее влечение к лицам, похожим на них самих по важным межличностным характеристикам. Если считать координату x_{sk} идеальной точки субъекта s по оси k его субъективным восприятием себя по оси k , то гипотезу о сходстве-привлекательности можно интерпретировать как дистанционную модель, в которой идеальная точка субъекта s соответствует тем признакам, относительно которых этот субъект считает, что он ими обладает. Чем больше другой индивид напоминает идеал, т. е. совокупность признаков, относительно которых субъект s считает, что он ими обладает, тем больше этот индивид будет нравиться субъекту s . Гипотеза сходства-привлекательности привела в [Davison and Jones, 1976] к следующим предсказаниям: (1) модель евклидова расстояния лучше объяснит социометрические оценки, чем векторная модель, (2) у лиц с высокими самооценками по шкале межличностного восприятия будут по этой же оси высокие оценки идеальных точек.

Для проверки этих предсказаний проводилось описанное в [Davison and Jones, 1976] исследование тренировочной части военно-воздушных сил в одном из университетов. Изучаемая часть имела две интересные для наших целей формальные характеристики: у каждого студента-курсанта был курсантский ранг, так что среди членов группы существовала формальная иерархия; в части было два подразделения — военизированное и добровольное.

Среди 19 лиц-стимулов было 3 кадровых офицера и 16 студентов-курсантов. Оценивали их 45 субъектов из той же части, в том числе

* Под социометрическим предпочтением понимается предпочтение субъектом лиц из окружающей его малой социальной группы по параметрам, характеризующим межличностное взаимодействие в этой группе. — *Примеч. пер.*

19 лиц-стимулов. В эксперименте оценивалось сходство всех возможных пар стимулов. Затем каждое лицо-стимул оценивалось по девяти одномерным признакам, включающим «статус» и «энтузиазм при отдаче приказов». В заключении эксперимента оценивающие давали стимулам социометрические оценки: оценивали вероятность того, что они выберут оцениваемого как (1) товарища по тренировкам, (2) соседа по комнате, (3) приятеля, (4) офицера-сослуживца и (5) гостя.

Анализ оценок сходства с помощью программы INDSCAL [Carroll and Chang, 1970] позволил получить трехмерное решение. Корреляции между координатами были низкие: $r_{I II} = 0,13$, $r_{I III} = -0,02$, $r_{II III} = 0,06$. В [Davison and Jones, 1976] координатная ось I интерпретировалась как ось статуса. Члены военизированного и добровольного подразделений были представлены на разных концах оси II, что может отражать конкуренцию между группами в привлечении новых членов и за ведущие позиции в части. Ось III можно считать отражающей воспринимаемый энтузиазм лица-стимула при отдаче приказов.

Подгонка моделей предпочтения

К основным социометрическим оценкам каждого субъекта были подогнаны векторная, простая евклидова и взвешенная евклидова модели. В табл. 7.9 приведены статистики, использованные для сравнения трех моделей предпочтения. Коэффициент множественной корреляции, измеряющий долю дисперсии в оценках каждого субъекта, объясняемую различными моделями, у 45 субъектов меняется от 0,31 до 0,92, от 0,34 до 0,92 и от 0,42 до 0,92 для линейной, простой евклидовой и взвешенной евклидовой моделей соответственно. Средние квадратические* коэффициенты множественной корреляции для всех 45 субъектов равны 0,68, 0,70 и 0,76, три модели объясняют в среднем 47, 49 и 57% дисперсии в оценках привлекательности.

При проверке нулевой гипотезы $R^2 = 0$ для каждого из 45 субъектов 29 $[F_{(8,15)}]$ из 45 коэффициентов множественной корреляции были значимы на уровне 0,05, а 15 — на уровне 0,01. При проверке нулевой гипотезы $R^2 = 0$ для каждого из субъектов статистика $F_{(4,14)}$ достигла уровня значимости 0,05 для 26 субъектов и уровня значимости 0,01 для 13 субъектов. Наконец, множественная корреляция R^2_W достигла уровня значимости 0,05 для 19 субъектов $[F_{(6,12)}]$ и уровня значимости 0,01 для 12 субъектов.

Табл. 7.9 показывает, что взвешенная евклидова модель объясняет в среднем большую долю дисперсии, но линейная модель позволяет чаще достигать принятых уровней значимости. Оба результата обусловлены тем, что подгонка взвешенной евклидовой модели требует

* Средняя квадратическая — квадратный корень из средней арифметической квадратов. — *Примеч. пер*

оценки самого большого числа параметров, а подгонка линейной модели — оценки самого маленького числа параметров.

Таблица 79 Сводная таблица статистик для сравнения векторной, простой евклидовой и взвешенной евклидовой моделей

Статистика	Модель		
	векторная	простая евклидова	взвешенная евклидова
Совместные оценки			
Средняя квадратическая R	0,68	0,70	0,76
Субъекты, для которых $p < 0,05$	29	26	19
Субъекты, для которых $p < 0,01$	15	13	12
Предсказание оценок набора 1 из набора 2			
Средняя квадратическая R	0,65	0,67	0,71
Субъекты, для которых модель была наилучшей	5	5	35
Предсказание оценок набора 2 из набора 1			
Средняя квадратическая R	0,64	0,66	0,71
Субъекты, для которых модель была наилучшей	5	7	33

Источник [Davison and Jones, 1976]. Перепечатано с разрешения автора и издателя

Для построения теста перекрестной проверки моделей пять социометрических шкал были разделены на два набора: в первом — шкалы «говарийц по тренировкам», «сосед по комнате» и «приятель», а во втором — шкалы «офицер-сослуживец» и «гость». Шкалы первого набора были усреднены для получения одной меры привлекательности, а шкалы второго — для получения другой меры. Затем модели, сравнивались путем использования оценок параметров, полученных из первой меры привлекательности, для предсказания второй меры привлекательности, и наоборот. Результаты анализа приведены в табл. 7.9.

Средние квадратические множественных корреляций при перекрестной проверке для взвешенной евклидовой модели равны 0,71 и 0,71, для простой евклидовой модели — 0,67 и 0,66, для векторной модели — 0,65 и 0,64. Перекрестная проверка показала, что взвешенная евклидова модель лучше, чем простая евклидова и векторная модели, так как с ее помощью можно объяснить большую долю дисперсии (на 5—10%). Для 35 из 45 субъектов взвешенная евклидова модель предсказывает точнее, чем две другие модели, в том случае, когда оценки параметров, полученные из второй меры привлекательности, использовались для предсказания первой. Когда же оценки параметров, полученные из первой меры привлекательности, были использованы для предсказания второй, взвешенная евклидова модель для 33 субъектов из 45 дала более точные предсказания, чем другие модели.

Анализ идеальных точек

В процессе исследования было обнаружено, что у одних испытуемых на осях расположены идеальные точки (субъективные веса осей положительны), а у других испытуемых на осях расположены антиидеальные точки (субъективные веса осей отрицательны). Поэтому необходим способ сравнения идеалов и антиидеалов. Рассмотрим среднее значение признака у лиц-стимулов. Есть сходство между оценками привлекательности, данными субъектами, имеющими идеальную точку выше этого среднего значения и оценками привлекательности, данными субъектами, имеющими антиидеальную точку ниже этого среднего значения. Как те, так и другие субъекты при выборе друзей указали на ту часть шкалы, где расположены высокие значения. Наоборот, субъекты с идеальной точкой ниже среднего значения должны вести себя в некоторых отношениях аналогично субъектам с антиидеальной точкой выше среднего значения. Для тех и других привлекательны лица-стимулы в нижней части шкалы. Иными словами, координата идеальной точки отражает величину и направление предпочтений субъекта. Антиидеал отражает то же самое, если изменить знак. Поэтому для каждого субъекта были построены преобразованные оценки координат идеальных точек. Если субъективный вес положителен, то преобразованная оценка координаты идеальной точки равна самой координате. Если же вес отрицателен, то преобразованная оценка равна антиидеалу, умноженному на -1 .

В данных о тренировочной части все преобразованные идеальные точки на оси I, кроме одной, положительны, т. е. независимо от собственного статуса для подавляющего большинства более привлекательны лица с высоким статусом. (Среднее значение лиц-стимулов по каждой из осей равно 0,00.) Если судить по двум оставшимся осям, то у субъектов, как и следовало ожидать, нет столь единодушного предпочтения друзей, представленного на одном из полюсов оси. Например, на оси II преобразованные идеальные точки 28 субъектов положительны, что указывает на предпочтение ими друзей из добровольного подразделения, а у 17 они отрицательны, что указывает на предпочтение ими друзей из военизированного подразделения. На оси III — оси энтузиазма при отдаче приказов — 34 субъекта предпочитают друзей, расположенных ниже среднего значения, а 13 предпочитают друзей выше среднего значения.

Субъекты на каждой оси делились на две группы — группу с высокими значениями преобразованных идеалов и группу с низкими значениями. Значение считалось высоким, если оно было больше медианы преобразованных идеальных точек по этой оси, и низким, если оно было меньше медианы. Затем сравнивались самооценки субъектов из группы с высокими значениями и из группы с низкими значениями. Субъекты из группы с высокими значениями по оси I, оси статуса, оценивали свой стимул выше, чем лица из группы с низкими значе-

ниями ($p < 0,01$). На оси II субъекты с высокими и низкими значениями преобразованных идеальных точек значимо различаются по их участию в подразделениях ($p < 0,001$). И на оси III субъекты из группы с высокими значениями отличаются от субъектов из группы с низкими значениями своим энтузиазмом при отдаче приказов. Все эти различия были предсказаны гипотезой сходства-привлекательности.

ДРУГИЕ ДАННЫЕ

Модель идеальной точки применяется не только для данных о предпочтении. Основываясь на ранних предположениях из [Wohlwill, 1973], Дэйвисон [Davison, 1977; Davison et al., 1978; Davison et al., 1980] предложил одномерную дистанционную модель эволюции как процесса замещения. Имелась в виду, в частности, эволюция морали [Kohlberg, 1976; Rest, 1979] и эволюция личности [Loevinger, 1966]. В [Davison, 1978, 1980] определялась замещающая последовательность, т. е. последовательность, в которой отклики, относящиеся к высоким стадиям процесса развития, постепенно замещают отклики, относящиеся к его низким стадиям. В этой модели идеальная точка каждого субъекта соответствует его уровню развития x_s . Каждая стадия имеет шкальное значение x_i . Чем больше уровень развития субъекта s соответствует расположению стадии i на континууме развития [т.е. чем меньше квадрат расстояния $d_{is}^2 = (x_i - x_s)^2$], тем больше вероятность того, что субъект s выберет (предпочтет) отклик, связанный со стадией i .

Основное предположение модели эволюции в том, что оценки по переменным, имеющим отношение к стадиям процесса развития, связаны с уровнем развития субъекта одновершинной монотонной функцией, такой, как показана на рис. 7.4. Переменные более высоких стадий имеют вершины в более высоких точках континуума. В [Loevinger, 1966] предполагается как раз такой вид основных индикаторов развития личности. В указанной работе они названы веховыми переменными. Веха определена как наблюдаемая характеристика поведения, значение которой по мере достижения личностью зрелости сначала возрастает, а затем падает. Например, значение конформности по отношению к обычным социальным стандартам до некоторого момента увеличивается, а после этого уменьшается, хотя конформность и не обязательно переходит при этом в неконформность. Это описание одновершинных немонотонных функций откликов, таких, как на рис. 7.4.

С помощью дистанционной модели можно (хотя это и не проверено) описывать выбор языковых категорий для обозначения объектов (стимулов) [Mervis and Rosch, 1981]. В таком приложении идеальные точки соответствуют категориям. Координата идеальной точки $x_{s,k}$ обозначает уровень по k -й оси, связанный с прототипом категории s . Аналогично у каждого стимула есть шкальное значение по оси k . Согласно дистанционной модели языковых категорий, обозначающих объекты,

вероятность того, что субъект включит стимул i в категорию s , будет функцией расстояния между стимулом и прототипом категории s в k -мерном пространстве, т.е. чем больше стимул i напоминает прототип категории s , тем больше вероятность того, что он будет отнесен к этой категории.

Модели выбора профессии [Campbell, 1977; Dawis et al., 1968; Holland, 1973] можно интерпретировать как дистанционные модели. В этих теориях субъект s имеет на осях оценки своих интересов $x_{s,k}$. Профессии можно считать соответствующими наборам их существенных характеристик. Пусть $x_{i,k}$ — оценка по оси k профессии i . Чем меньше

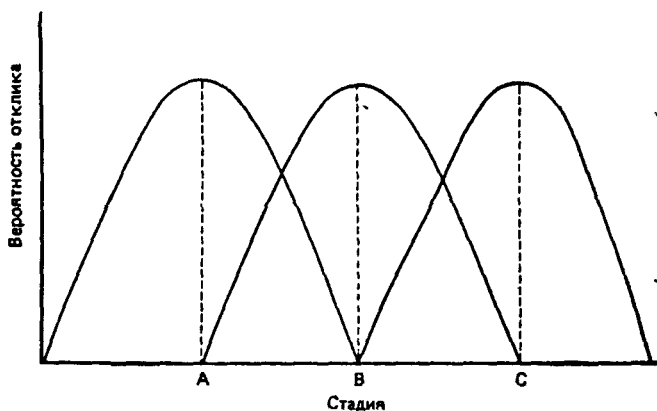


Рис. 7.4. Вероятность отклика, соответствующего стадиям А, В и С, как функция уровня развития

расстояние между интересами субъекта s и профессией i , тем более интересы субъекта соответствуют профессии i . Подобные теории предполагают, что люди более склонны к тем профессиям, которые соответствуют их собственным интересам, и более удовлетворены ими.

В [Cliff et al., 1973] предложена дистанционная модель вопросников для самооценки личности. В этой модели идеальная точка субъекта на оси характеристики k — $x_{s,k}$. Она соответствует тому значению характеристики, которым этот субъект, по его мнению, обладает. С каждым описанием i личности связан набор координат $x_{i,k}$. Эти величины и есть координаты описания в том же K -мерном пространстве. Чем больше восприятие субъектом самого себя напоминает описание, т.е. чем меньше расстояние между субъектом и описанием в K -мерном пространстве, тем скорее субъект скажет, что для него это описание верно. Такую же модель можно предложить и для вопросника по оценке установки.

ВЫВОДЫ

Многомерное шкалирование данных о предпочтении включает внутренний и внешний анализ. Входная информация для внутреннего анализа — матрица предпочтений стимулов субъектами. Каждый столбец содержит упорядочение стимулов по предпочтению одним субъектом. Предполагается, что предпочтения монотонно зависят от расстояний между точками-стимулами и идеальными точками субъектов. Анализ данных проводится в значительной степени так же, как и в неметрическом многомерном шкалировании данных о различии, за исключением того, что это анализ, условный по столбцу. Использование формулы 2 стресса или S-стресса делает анализ менее подверженным локальным минимумам и вырожденностям. Как локальные минимумы, так и вырожденности чаще возможны при анализе данных о предпочтении. Более того, координаты при анализе предпочтений часто оцениваются меньшей точностью.

Решение включает оценки координат стимулов и координат идеальных точек по всем K осям. Проблемы поворота и размерности решения для данных о предпочтении и данных о различии практически те же. Исследователю разрешается интерпретировать как координаты стимулов, так и координаты идеальных точек. Основу для интерпретации координат идеальных точек обеспечивают содержательно важные упорядочения и группировки объектов.

При внешнем анализе координаты стимулов предполагаются известными. Выходная информация включает оценки субъективных параметров модели предпочтений. Основой интерпретации координат идеальных точек служат, как и при внутреннем анализе, содержательно важные упорядочения и группировки субъектов.

Кэррол [Carroll, 1972] описал иерархию четырех моделей предпочтения: векторной, простой евклидовой, взвешенной евклидовой и обобщенной евклидовой. Каждая из этих моделей включает в качестве частных случаев все предыдущие модели. Если модели подогнаны методом множественной регрессии, то квадрат коэффициента множественной корреляции равен доле дисперсии в данных субъекта s , объясняемой примененной моделью и координатами стимулов. Для проверки соответствия каждой модели и проверки того, какая модель соответствует больше, можно построить F -статистики.

В [Davison and Jones, 1976] исследование гипотезы сходства-привлекательности при социометрическом выборе проводилось методами внешнего анализа. Понятие идеальной точки позволяет моделировать такие процессы, как процесс развития, выбор профессии, самооценка личности. Читателям, желающим больше узнать о многомерном шкалировании данных о предпочтении, следует обратиться к [Bechtel, 1976] или [Heiser, 1981] *.

* На русском языке см. [Каменский, 1977а, 1979а, б, г; Саатаров и Каменский, 1977; Саатаров, 1982; Терехина, 1978 б]. — *Примеч. пер.*

ЗАДАЧИ

1. Выполните неметрический внешний анализ данных о предпочтении из табл. 7.10 в размерностях 1—5.

а) Нарисуйте график зависимости меры соответствия от размерности. Сколько координатных осей следует сохранить? Почему?

б) Нарисуйте двумерную конфигурацию только точек-стимулов. Как вы будете ее интерпретировать?

в) Сравнивая координаты стимулов с координатами идеальных точек субъектов, определите, какой у каждого из субъектов любимый цвет.

Т а б л и ц а 7.10. Ранговые порядки предпочтения цветов шестью субъектами*

	Субъект					
	А	В	С	Д	Е	Ф
Оранжевый	1	2	3	4	3	2
Красный	2	1	2	3	4	3
Фиолетовый	3	2	1	2	3	4
Голубой	4	3	2	1	2	3
Зеленый	3	4	3	2	1	2
Желтый	2	3	4	3	2	1

* 1 — наиболее предпочитаемый, 4 — наименее предпочитаемый.

2. Подгоните векторную модель, модель простого развертывания и модели взвешенного развертывания (7.4)—(7.6) к данным о предпочтении супружеской парой составов семьи по данным из табл. 7.11. Используйте приведенные в этой таблице значения координат. Предположите, что большее число указывает меньшее предпочтение состава семьи.

Т а б л и ц а 7.11. Оценки предпочтений состава семьи супружеской пары

	Состав семьи								
	0	0	0	1	1	1	2	2	2
Число девочек	0	0	0	1	1	1	2	2	2
Число мальчиков	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Предпочтение	1,2	1,0	1,2	0,5	0,00	0,5	1,2	1,0	1,2

а) Какую долю дисперсии объясняет каждая модель?

б) Отклоните ли вы на уровне значимости 0,05 нулевые гипотезы $R_V^1 = 0?$
 $R_E^2 = 0?$ $R_W^2 = 0?$

в) Отклоните ли вы на уровне значимости 0,05 нулевые гипотезы $R_E^2 = R_V^2?$
 $R_W^2 = R_E^2?$ $R_W^2 = R_V^2?$

г) Какой состав семьи выберет, по вашему мнению, супружеская пара, если основываться на взвешенной модели развертывания?

д) Опишите относительные веса координат во взвешенной евклидовой модели.

е) Разумно ли на основе анализа оценок координат идеальной точки во взвешенной модели развертывания и различных статистик соответствия сделать вывод, что предпочтения пары линейно связаны с координатами стимулов? Монотонно зависят от них в пределах диапазона исследуемых стимулов?

ОТВЕТЫ

1. а) На графике (рис. 7.5) при $K = 2$ явный изгиб, и двумерное решение соответствует полностью. Поэтому следует выбрать двумерное решение.

б) На двумерной конфигурации (рис. 7.6) цвета расположены в виде стандартного цветового круга. Дополнительные цвета — красный и зеленый, фиолетовый и желтый, голубой и оранжевый — появляются друг против друга*.

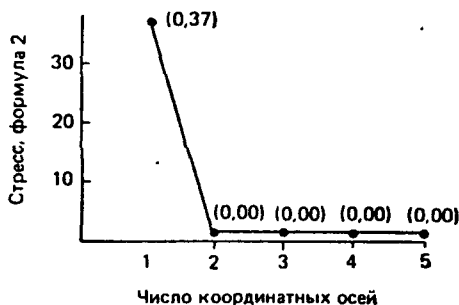


Рис. 7.5. График зависимости меры соответствия от размерности для данных о предпочтении цветов из задачи 1



Рис. 7.6. Двумерная конфигурация цветов-стимулов в задаче 1

в) Координаты стимулов «оранжевый», «красный», «фиолетовый», «голубой», «зеленый» и «желтый» идентичны координатам идеальных точек субъектов А — F. Поэтому координаты идеальных точек показывают, что любимыми цветами субъектов А — F являются соответственно оранжевый, красный, фиолетовый, голубой, зеленый и желтый**.

2. а) Векторная, простая евклидова и взвешенная евклидова модели объясняют в оценках этой пары 0, 81 и 97 % дисперсии соответственно.

б) Нулевая гипотеза $R_{\bar{V}}^2 = 0 [F_{(2,4)} = 0,00]$ на уровне 0,05 не отбрасывается, но будут отброшены нулевые гипотезы $R_E^2 = 0 [F_{(3,5)} = 6,95]$ и $R_W^2 = 0 [F_{(4,4)} = 36,50]$.

* Те же цветовые круги получаются при применении к данным табл. 7.10 программы парного неметрического многомерного развертывания PARSUN с Краскаловской стартовой конфигурацией ($\theta = 0,001$) и случайными стартовыми конфигурациями (среди полученных — конфигурация, полностью соответствующая данным, $\theta = 0$). — Примеч. пер.

** Такой же вывод можно сделать и по конфигурации, полученной методом парного неметрического многомерного развертывания. Хотя на ней координаты субъектов и не идентичны координатам их любимых цветов, для каждого из субъектов его любимый цвет ближе всего к его идеальной точке. — Примеч. пер.

в) На уровне 0,05 отбрасываются нулевые гипотезы $R_E^2 = R_V^2 [F_{(1,5)}' = 20,86]$, $R_W^2 = R_E^2 [F_{(1,4)} = 25,00]$ и $R_W^2 = R_V^2 [F_{(2,4)} = 72,99]$. Взвешенная евклидова модель соответствует значимо лучше, чем две модели, которые она включает как частный случай, а простая евклидова модель — значимо лучше, чем векторная модель.

г) Оценка идеальной точки $\hat{x}_{s1} = \hat{x}_{s2} = 1,00$, откуда следует, что супруги выберут семью с одним мальчиком и одной девочкой.

д) Отклонение нулевой гипотезы $R_W^2 = R_E^2$ на уровнях значимости 0,05 и 0,01 позволяет сделать вывод, что веса двух координатных осей значимо различаются. Координата I, число девочек, получает для этой супружеской пары во взвешенной евклидовой модели в два раза больший вес, чем координата II: $\hat{w}_{1s} = 0,80$, $\hat{w}_{2s} = 0,30$.

е) На уровне значимости 0,05 следует отклонить нулевые гипотезы $R_E^2 = R_V^2$ и $R_W^2 = R_V^2$. Это заставляет предположить, что предпочтения супружеской пары нелинейно связаны с предпочтениями значений хотя бы по одной из координатных осей. Поскольку обе координаты идеальной точки лежат на осях I и II в середине диапазона стимулов, они показывают, что предпочтения супружеской пары не являются монотонной функцией значений обеих координат в пределах включенного в исследование диапазона.

Исследователь очень редко применяет многомерное шкалирование без каких-либо априорных гипотез о природе конфигурации стимулов. В некоторых случаях у него есть априорная гипотеза о конфигурации в целом. Эта гипотеза может появиться как на основе теории, так и на основе результатов более раннего шкалирования стимулов. Например, теория выбора профессий Холланда [Holland, 1973] привела авторов работы [Rounds et al., 1979] к постулированию шестиугольной конфигурации, изображенной на рис. 5.2. С другой стороны, если гипотеза о конфигурации возникла на основе уже проведенного анализа, то исследователь может проверить, будут ли верны полученные результаты применительно к новым данным.

Однако иногда гипотеза исследователя не относится к конфигурации в целом. Он имеет в виду лишь некоторые характеристики стимулов, которые, по его мнению, появятся в конфигурации стимулов. И в этом случае источником гипотез относительно координатных осей может служить как теория, так и проведенная экспериментальная работа. Цель исследователя в подобной ситуации заключается в том, чтобы отдельно оценить эти гипотетические координатные оси и понять, какие из предполагаемых признаков появятся в построенной с помощью многомерного шкалирования конфигурации, и появятся ли они вообще.

Данная глава разделена на две части. В первой обсуждаются наиболее часто применяемые методы проверки гипотез относительно отдельных признаков в построенной конфигурации. Вторая часть посвящена проверке гипотез, касающихся конфигурации стимулов в целом.

ГИПОТЕЗЫ О ПРИЗНАКАХ

Широко применяемые методы проверки гипотез относительно признаков конфигурации требуют получения значений стимулов по каждому из гипотетических признаков. Эти значения должны быть найдены с помощью процедур, отличных от процедур получения данных о близости. На последних, как известно, основано многомерное шкалирование. Например, в исследовании воспринимаемой структуры группы [Jones and Young, 1972], описанном в гл. 6, получено по 10 значений для каждого лица-стимула. Большая часть из 10 мер, приведенных в

табл. 8.1, — субъективные оценки. Например, для получения меры политических убеждений лиц-стимулов субъекты оценивали каждое лицо-стимул по 9-балльной шкале «левый-правый». Мерой политических убеждений служила средняя оценка лица-стимула по этой шкале. Еще один признак — академический ранг, который измерялся объективно. В большинстве работ по многомерному шкалированию признаки включают как объективные, так и субъективные индексы.

Таблица 8.1 Корреляции значений признаков с координатными осями, полученными с помощью программы INDSCAL. Выборка 1970 г.

Признак	Координатная ось		
	I статус	II политические убеждения	III профессиональные интересы
Интерес к			
содержательным проблемам	0,50	0,05	-0,75
статистике	0,14	-0,25	0,78
вычислительным машинам	0,13	-0,01	0,29
обучению	0,59	0,35	-0,14
экспериментированию	0,35	0,35	-0,83
Воспринимаемый статус	0,96	-0,17	-0,15
Академический ранг	0,95	-0,15	-0,10
Интерес к общественной жизни	0,14	0,83	-0,11
Стиль жизни	-0,10	0,86	-0,21
Политические убеждения	0,15	-0,93	0,23

Источник [Jones and Young, 1972]. Перепечатано с разрешения издателя и автора.

Использование значений признаков для оценки гипотез зависит, в частности, от того, можно ли повернуть решение без потери соответствия данных. Так как при невозможности поворота процесс интерпретации проще, начнем обсуждение с такой ситуации. В качестве иллюстрации мы предпочли исследование [Jones and Young, 1972].

Фиксированное положение осей

Решение в [Jones and Young, 1972] получено с помощью программы INDSCAL [Carroll and Chang, 1970], поэтому, за исключением особых обстоятельств (см. примечание на с. 132), оно не может быть повернуто без потери соответствия данным. Если один из гипотетических признаков соответствует какой-то координатной оси, то его величины должны значимо и высоко (обычно с абсолютной величиной 0,70 и выше) коррелировать с координатами стимулов по одной из координатных осей. В идеале они не должны коррелировать ни с какой другой координатной осью.

Все признаки из [Jones and Young, 1972] в табл. 8.1, кроме двух («интерес к вычислительным машинам» и «интерес к обучению»), имеют коэффициент корреляции с одной координатной осью выше 0,70. Переменные «воспринимаемый статус» и «академический ранг» имеют коэффициенты корреляции 0,96 и 0,95 с координатами стимулов по оси I, которую авторы интерпретируют как ось статуса. Их интерпретация хорошо подтверждается корреляциями координат стимулов с переменными «воспринимаемый статус» и «академический ранг».

Коэффициенты корреляции координатной оси II, названной авторами осью политических убеждений, с субъективными оценками интереса к общественной жизни, стилю жизни и политических убеждений равны 0,83, 0,86 и — 0,93. Шкалы интереса к содержательным проблемам, статистике и экспериментированию имеют корреляции 0,75 и выше по абсолютной величине с осью III. Наличие такой корреляции подтверждает интерпретацию этой оси как оси профессиональных интересов.

Корреляции между признаками стимулов и координатными осями дают количественную основу для проверки априорных гипотез автора относительно признаков, которые могут появиться в решении. Какое-то подтверждение получили гипотезы о всех признаках, кроме двух. Более того, корреляции помогают интерпретировать координатные оси. Интерпретация координатных осей решения задачи многомерного шкалирования не должна основываться только на субъективном впечатлении исследователя.

Промежуточный поворот

При метрическом решении Торгерсона, неметрическом евклидовом или трехмодальном решении конфигурация может быть повернута без потери соответствия данным. В этом случае для проверки гипотезы относительно признака следует определить, возможно ли повернуть координатные оси так, чтобы одна из них соответствовала интересующему нас гипотетическому признаку. Покажем, не приводя доказательства, что оценки $\hat{x}_{ik'}$ по повернутой оси k' можно записать следующим образом:

$$\hat{x}_{ik'} = \sum_k b_{kk'} \hat{x}_{ik} + c_{k'}. \quad (8.1)$$

Здесь \hat{x}_{ik} — оценка координаты стимула i по неповернутой оси k ; $b_{kk'}$ — неизвестный мультипликативный вес (или вес множественной регрессии); $c_{k'}$ — аддитивная константа.

Стандартные методы множественной регрессии позволяют найти такие веса $\hat{b}_{kk'}$ и аддитивную константу $\hat{c}_{k'}$, при которых повернутые оценки координат $\hat{x}_{ik'}$ максимально коррелируют со значениями по данному признаку. Далее под $\hat{b}_{kk'}$ будем понимать мультипликатив-

ную константу, связанную с повернутой координатной осью k и такой повернутой координатной осью k' , которая максимально коррелирует со значениями признака k' . В регрессионном анализе I значений признака k' , по одному значению для каждого стимула, являются значениями выходной переменной. K входных переменных — это K повернутых координатных осей стимулов. Полученные регрессионные веса — это эмпирические оценки $b_{kk'}$ и $c_{k'}$ из (8.1). Квадрат множественной корреляции R_k^2 показывает долю дисперсии значений признака, которая может быть объяснена оптимально повернутыми координатными осями. Подтверждаются такие признаковые гипотезы статистически значимыми величинами коэффициентов множественной корреляции — обычно 0,75 и выше.

Чтобы проиллюстрировать применение методов множественной регрессии для проверки гипотез относительно признаков, рассмотрим данные в табл. 8.2.

Таблица 8.2 Значения стимулов по координатным осям и значения признаков для данных о странах

Страна	Координатная ось			Гипотетический признак		
	I	II	III	Юг—Север	Восток—Запад	Политическая ориентация
Ангола	-0,73	0,00	-0,21	0,500	0,375	0,500
Аргентина	0,42	0,71	-0,45	0,500	-0,625	-0,500
Австралия	-0,28	0,71	0,26	0,500	0,375	-0,500
Китай	-0,28	-0,71	0,26	-0,500	0,375	0,500
Куба	0,42	-0,71	-0,45	-0,500	-0,625	0,500
Япония	0,24	0,00	0,77	-0,500	0,375	-0,500
США	0,95	0,00	0,04	-0,500	-0,625	-0,500
Зимбабве	-0,73	0,00	-0,21	0,500	0,375	0,500

Столбцы 2—4 таблицы — это повернутые координатные оси стимулов для данных о странах из задачи 2 гл. 4. Данные в этой задаче полностью гипотетические, хотя они основаны на реальном исследовании [Wish et al., 1970]. В столбцах 5—7 содержатся гипотетические признаки. Первый признак — ось Юг — Север, по которой страны Южного полушария имеют оценку 0,500, а страны Северного полушария — оценку — 0,500. В столбце 6 — ось Восток — Запад. Страны Восточного полушария имеют здесь оценку 0,375, а Западного полушария — оценку — 0,625. Последний столбец содержит оценку по шкале политической ориентации, где социалистические страны и страны социалистической ориентации имеют оценку 0,500, а капиталистические — оценку — 0,500.

Для проверки гипотез о признаках были выполнены три расчета методом множественной регрессии, по одному для каждого признака. Три координатные оси решения задачи многомерного шкалирования, приведенные в столбцах 2—4 табл. 8.2, в этих расчетах были входными переменными. Полученные множественные корреляции и регрессионные веса приведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3. Регрессия переменных-признаков по координатным осям стимулов из табл. 8.2

Признак	Множественная корреляция*	Стандартизованный регрессионный вес для координатной оси			Косинус для координатной оси		
		I	II	III	I	II	III
Юг — Север	1,00	-0,587	0,707	-0,391	-0,587	0,707	-0,391
Восток — Запад	1,00	-0,821	0,000	0,573	-0,821	0,000	0,573
Политическая ориентация	1,00	-0,587	-0,707	-0,391	-0,587	-0,707	-0,391

* $p < 0,01$

С точностью до двух десятичных знаков все три коэффициента множественной корреляции равны 1,00, т. е. все три гипотетических признака хорошо представлены в трехмерном решении задачи. Стандартизованные регрессионные веса в столбцах 3—5 табл. 8.3 — это эмпирические оценки весов $b_{kk'}$ из формулы (8.1).

Вращение решения

Если повернутые координатные оси стимулов интерпретировать трудно, то результаты расчета методом множественной регрессии для получения более интерпретируемого поворота можно использовать при выполнении двух условий. Во-первых, K гипотетических признаков должны иметь низкую корреляцию друг с другом, и, во-вторых, у них должна быть высокая множественная корреляция с повернутыми координатными осями. Чтобы показать, как можно применить результаты расчета методом множественной регрессии для получения более интерпретируемого решения, возьмем стандартную оценку регрессионного веса $\hat{b}_{kk'}$ для повернутой координатной оси k и гипотетического признака k' .

$$\widehat{t}_{kk'} = \frac{\widehat{b}_{kk'}}{R_{k'}} \quad (8.2)$$

является оценкой косинуса угла между повернутой координатной осью k и такой повернутой координатной осью k' , которая максимально коррелирует со значениями признака k' . Пусть \widehat{T} — матрица преобразования $K \times K$ с элементами $\widehat{t}_{kk'}$, определенными по формуле (8.2). Пусть

$$\widehat{X}^* = \widehat{X}\widehat{T}, \quad (8.3)$$

где \widehat{X} — матрица повернутых координат стимулов. Ось k' в матрице повернутых координат стимулов \widehat{X}^* будет соответствовать гипотетической переменной k' . Коэффициент корреляции между координатной осью k' в \widehat{X}^* и значениями гипотетического признака k' будет равен $R_{k'}$. Все новые координатные оси в повернутой матрице координат стимулов \widehat{X}^* имеют явную интерпретацию, так как они соответствуют гипотетическим признакам и высоко коррелируют с ними.

Следует, однако, предупредить об одном обстоятельстве. Если определитель матрицы $\widehat{T}'\widehat{T}$, $\det \widehat{T}'\widehat{T}$, равен нулю, то новая матрица \widehat{X}^* не может верно воспроизвести всю информацию из \widehat{X} . В большинстве учебников матричной алгебры [Green, 1978; Hohn, 1973] описано, как найти определитель матрицы*. В некоторых программах факторного анализа [Nie et al, 1975] предусмотрена возможность напечатать $\det \widehat{T}'\widehat{T}$, если $\widehat{T}'\widehat{T}$ введена в программу вместо корреляционной матрицы. В любом случае до того, как считать \widehat{X}^* решением, следует проверить, не будет ли $\det \widehat{T}'\widehat{T}$ близок к нулю. Если это так, то K гипотетических признаков слишком высоко коррелируют друг с другом, чтобы служить основой для поиска более интерпретируемого поворота.

В табл. 8.3 показаны величины $\widehat{t}_{kk'}$, вычисленные по формуле (8.2) из регрессионных весов, находящихся в этой же таблице. Поскольку в этом примере для всех k' $R_{k'} = 1,00$, везде $\widehat{t}_{kk'} = \widehat{b}_{kk'}$. Эти оценки косинусов, собранные вместе, образуют матрицу \widehat{T} :

$$\widehat{T} = \begin{bmatrix} -0,587 & -0,821 & -0,587 \\ 0,707 & 0,000 & -0,707 \\ -0,391 & 0,573 & -0,391 \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

* На русском языке см работы, упомянутые в примечании на с. 31. — Примеч. пер.

Умножая слева \widehat{T} из (8.4) на матрицу повернутых координат стимулов из табл. 8.2, получим:

$$\widehat{X}^* = \widehat{X} \widehat{T} = \begin{bmatrix} -0,73 & 0,00 & -0,21 \\ 0,42 & 0,71 & -0,45 \\ -0,28 & 0,71 & 0,26 \\ -0,28 & -0,71 & 0,26 \\ 0,42 & -0,71 & -0,45 \\ 0,24 & 0,00 & 0,77 \\ 0,95 & 0,00 & 0,04 \\ -0,73 & 0,00 & -0,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,587 & -0,821 & -0,587 \\ 0,707 & 0,000 & -0,707 \\ -0,391 & 0,573 & -0,391 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,51 & 0,48 & 0,51 \\ 0,43 & -0,60 & -0,57 \\ 0,56 & 0,38 & -0,44 \\ -0,44 & 0,38 & 0,56 \\ -0,57 & -0,60 & 0,43 \\ -0,44 & 0,24 & -0,44 \\ -0,57 & -0,76 & -0,57 \\ 0,51 & 0,48 & 0,51 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Ангола} \\ \text{Аргентина} \\ \text{Австралия} \\ \text{Китай} \\ \text{Куба} \\ \text{Япония} \\ \text{США} \\ \text{Зимбабве.} \end{matrix} \quad (8.5)$$

По оси I в повернутой матрице координат стимулов \widehat{X}^* страны Южного полушария появляются на положительном конце, а страны Северного полушария — на отрицательном. Аналогично страны Восточного и Западного полушарий появляются на противоположных концах оси II. Социалистические страны и страны социалистической ориентации лежат на положительном конце оси III, а капиталистические страны — на отрицательном. После поворота можно явно интерпретировать эти оси как Юг — Север, Восток — Запад и ось политической ориентации. Определитель матрицы $\widehat{T} \widehat{T}$ равен 0,86, что гарантирует воспроизведение всей информации из матрицы \widehat{X} в повернутой матрице \widehat{X}^* .

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ГИПОТЕЗЫ

В [Schönemann and Carroll, 1970; Gower, 1971, 1975] обсуждаются повороты решения, которые могут служить основой для сравнения конфигурации стимулов с гипотетической целевой конфигурацией. Пусть \widehat{X} — матрица координат стимулов $I \times K$, а матрица $Y I \times K$ представляет гипотетическую конфигурацию. Как показано в следующем параграфе, целевая матрица может быть получена, в частности, из теории. Это может быть также матрица координат стимулов, построенная по результатам предыдущего многомерного шкалирования тех же стимулов. Первый шаг при сравнении матрицы координат стимулов \widehat{X} с целевой

матрицей \widehat{Y} — стандартизовать координаты в \widehat{X} и \widehat{Y} так, чтобы среднее значение координат стимулов по каждой оси было равно 0, т. е. $(1/I) \sum_i \widehat{x}_{ik} = (1/I) \sum_i y_{ik} = 0$ для всех k . В последующем обсуждении мы будем считать, что обе матрицы стандартизованы таким образом.

Предполагается, что целевая матрица Y и матрица координат \widehat{X} функционально связаны:

$$Y = c \widehat{X} T. \quad (8.6)$$

Здесь c — мультипликативная константа, а T — матрица ортогонального преобразования. Константа c в (8.6) представляет изменение масштаба или изменение единицы измерения, такое, как переход от футов к дюймам или от литров к миллилитрам. Иначе говоря, в соответствии с (8.6) координаты стимулов в \widehat{X} те же, что и в Y , за исключением изменения единицы измерения, представленного мультипликативной константой c , и поворота, представленного матрицей преобразования T . В [Schöpmann and Carroll, 1970; Gower, 1971, 1975] показано, как найти такие оценки мультипликативной константы c и матрицы преобразований \widehat{T} , которые минимизируют сумму квадратов ошибок:

$$SSE = \sum_{(i, k)} (y_{ik} - \widehat{y}_{ik})^2. \quad (8.7)$$

Символ \widehat{y}_{ik} в (8.7) означает элемент матрицы $\widehat{Y} = \widehat{c} \widehat{X} \widehat{T}$. Формулы (8.8) — (8.10) и (8.17) показывают, как оценить матрицу преобразования T и мультипликативную константу c . Объяснение того, как эти оценки получены, интересующийся читатель найдет в [Schöpmann and Carroll, 1970; Gower, 1971, 1975].

Для оценки c и T нужно сначала вычислить следующее $K \times K$ -произведение матриц:

$$A = Y' \widehat{X} \widehat{X}' Y. \quad (8.8)$$

С помощью любой программы метода главных компонент (см. гл. 2) можно найти такую $K \times K$ -матрицу B , что

$$A = BB'. \quad (8.9)$$

В результате такого анализа будет построена и диагональная $K \times K$ -матрица D . k -й диагональный элемент D , d_{kk} , будет равен k -му собственному значению, полученному при анализе главных компонент. Используя B и D , можно оценить T :

$$\widehat{T} = \widehat{X}' Y B D^{(-3/2)} B'. \quad (8.10)$$

Здесь $D^{(-3/2)}$ — диагональная матрица с k -м диагональным элементом $1/(d_{kk}^{1/2})^{1/2}$.

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим данные из табл. 8.2. Столбцы 2—4 содержат повернутую матрицу координат стимулов \widehat{X} для данных о странах из задачи 2 гл. 4. В следующих трех столбцах, 5—7, приведена гипотетическая матрица Y . Координаты по каждой из осей Y уже были стандартизованы так, что их средние значения равны 0,0. Поэтому первый шаг можно пропустить:

$$A = Y' \widehat{X} \widehat{X}' Y = \begin{bmatrix} 4,150 & 1,835 & 0,117 \\ 1,835 & 3,936 & 1,835 \\ 0,117 & 1,835 & 4,150 \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

Факторизуя A , получим матрицу B :

$$B = \begin{bmatrix} 1,335 & 1,420 & 0,593 \\ 1,771 & 0,000 & -0,894 \\ 1,335 & -1,420 & 0,593 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

и матрицу D :

$$D = \begin{bmatrix} 6,702 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 4,033 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,501 \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Вычисление произведения матриц по формуле (8.10) дает следующую оценку матрицы преобразования:

$$\widehat{T} = \widehat{X}' Y B D^{(-3/2)} B' = \begin{bmatrix} -0,510 & -0,699 & -0,510 \\ 0,706 & 0,000 & -0,706 \\ -0,493 & 0,720 & -0,493 \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

После получения матрицы преобразования \widehat{T} можно оценить матрицу повернутых координат стимулов \widehat{X}^* с элементами x_{ik}^* :

$$\widehat{X}^* = \widehat{X} \widehat{T}. \quad (8.15)$$

Для примера в табл. 8.2

$$\widehat{X}^* = \widehat{X} \widehat{T} = \begin{bmatrix} 0,48 & 0,36 & 0,48 \\ 0,51 & -0,62 & -0,49 \\ 0,52 & 0,38 & -0,49 \\ -0,49 & 0,38 & 0,52 \\ -0,49 & -0,62 & 0,51 \\ -0,50 & 0,39 & -0,50 \\ -0,50 & -0,64 & -0,50 \\ 0,48 & 0,36 & 0,48 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Ангола} \\ \text{Аргентина} \\ \text{Австралия} \\ \text{Китай} \\ \text{Куба} \\ \text{Япония} \\ \text{США} \\ \text{Зимбабве.} \end{array} \quad (8.16)$$

Мультипликативная константа \hat{c} может быть оценена по формуле (8.17):

$$\hat{c} = \frac{\sum_{(i,k)} \hat{x}_{ik}^* y_{ik}}{\sum_{(i,k)} \hat{x}_{ik}^2} \quad (8.17)$$

Для примера из табл. 8.2 $\hat{c} = 1,00$. Поэтому $\hat{Y} = \hat{X}^*$ из (8.16).

Матрица преобразования \hat{T} и мультипликативная константа \hat{c} минимизируют приведенную в (8.7) сумму квадратов ошибок. Они также максимизируют следующий коэффициент согласованности:

$$r(Y, \hat{X}) = \frac{\sum_{(i,k)} \hat{x}_{ik}^* y_{ik}}{\left[\sum_{(i,k)} \hat{x}_{ik}^{*2} \right]^{1/2} \left[\sum_{(i,k)} y_{ik}^2 \right]^{1/2}} \quad (8.18)$$

Если для каждой координатной оси в \hat{X} и каждой координатной оси в \hat{Y} среднее значение координат стимулов равно 0, то коэффициент согласованности — это просто корреляция между элементами гипотетической матрицы y_{ik} и элементами повернутой матрицы координат стимулов \hat{x}_{ik}^* . Он всегда будет изменяться от 0 до 1. Коэффициент, предложенный в формуле 19 статьи [Lingoes and Schönemann, 1974], равен $1 - r(Y, \hat{X})^2$. Подставляя \hat{x}_{ik}^* из (8.16) и y_{ik} из табл. 8.2 в (8.18), получим с точностью до двух знаков после запятой $r(Y, \hat{X}) = 1,00$.

Как велико должно быть $r(Y, \hat{X})$ для того, чтобы считать, что достигнуто хорошее соответствие между гипотетической матрицей Y и полученной матрицей \hat{X} ? Сейчас нет определенного ответа на этот вопрос. Однако в качестве очень грубого эмпирического правила можно считать, что при коэффициенте согласованности 0,90 и больше между целевой матрицей Y и полученной матрицей координат стимулов \hat{X} достигнуто отличное соответствие. Коэффициенты от 0,70 до 0,90 представляют диапазон изменения коэффициента от достаточного к хорошему.

Если есть две или более гипотетических матриц, то с помощью статистики $r(Y, \hat{X})$ их можно сравнить, чтобы определить, какая из них больше соответствует полученной конфигурации. Если же есть одна гипотетическая матрица Y и оценки \hat{X} для двух или нескольких подсовокупностей, то с помощью статистики $r(Y, \hat{X})$ можно сравнить эти подсовокупности, чтобы определить, в какой из них полученная конфигурация больше соответствует гипотезе.

Если координатные оси целевой матрицы Y имеют явные интерпретации и статистика согласованности $r(Y, \hat{X})$ высока, то и координат-

ные оси в повернутой матрице \widehat{X}^* должны быть явно интерпретируемы. В примере из табл. 8.2 неповернутая конфигурация практически бессмысленна. Каждая координатная ось повернутой конфигурации \widehat{X}^* может интерпретироваться так же, как и соответствующая координатная ось гипотетической матрицы Y . Когда повернутая матрица \widehat{X}^* более интерпретируема, чем неповернутая, процесс подгонки, описанной формулами (8.6) — (8.17), не только дает основу для сравнения гипотетической и полученной конфигурации. Он полезен и для определения осмысленного направления координатных осей в конфигурации стимулов.

ПОДТВЕРЖДАЮЩЕЕ МНОГОМЕРНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ

В предыдущем параграфе описан метод проверки гипотезы относительно конфигурации Y путем оценки ее согласованности с полученной конфигурацией \widehat{X} . Подтверждающее многомерное шкалирование дает еще один метод проверки гипотезы. В этом случае оценка основана на степени, с которой данные могут быть воспроизведены в конфигурации, соответствующей гипотезе. Поэтому оценка базируется не на коэффициенте согласованности, а на какой-то мере несоответствия, такой, как стресс, или мере соответствия, такой, как в INDSCAL и в (6.15). Кратко: при первом методе для оценки берутся соответствия между полученной и гипотетической конфигурациями. Второй метод, подтверждающий многомерное шкалирование, предполагает использование статистики соответствия для оценки степени того, как гипотетическая матрица воспроизводит исходные данные.

Подтверждающее многомерное шкалирование имеет преимущество перед описанными в предыдущем параграфе методами согласованности. Методы согласованности требуют определения каждой координатной оси в гипотетической матрице. Подтверждающие методы требуют определения лишь некоторых координатных осей. Поэтому, если гипотеза пользователя определяет часть координат стимулов, то можно применять только подтверждающий подход.

Существует несколько подтверждающих подходов, изложенных в [Bentler and Weeks, 1978; Bloxom, 1978; Borg and Lingoes, 1980; Carroll et al., 1980; Lee and Bentler, 1980; Noma and Johnson, 1979; Ramsay, 1980; Takane, 1981; Zinnes and Griggs, 1974].

Большинство из них основано или на неметрических моделях, рассмотренных в гл. 5, или на моделях индивидуальных различий, описанных в гл. 6. Обсуждаемые в этих главах меры соответствия часто применяются в подтверждающем анализе. Однако в подтверждающем анализе не все координаты стимулов оцениваются алгоритмом. Следует вычислять только координаты, не описанные в гипотезе.

Для иллюстрации общего подтверждающего подхода снова рассмотрим шестиугольную гипотезу из [Rounds et al., 1979] относительно

корреляции между шестью шкалами каталога предпочтения профессий. Эти данные приведены в табл. 5.1, а сама гипотеза наглядно изображена на рис. 5.2. Матрица Y из табл. 8.4

Таблица 8.4. Гипотетическая матрица координат стимулов Y для данных о шкалах каталога предпочтения профессий из табл. 5.5

Шкала	Координата	
	I	II
Реалистичная	0,00	1,00
Исследовательская	0,87	0,50
Художественная	0,87	-0,50
Гуманитарная	-0,00	-1,00
Предпринимательская	-0,87	-0,50
Традиционная	-0,87	0,50

содержит набор координат, который, если нарисовать его в размерности 2, образует шестиугольник, как на рис. 5.2. Поэтому матрица Y представляет приемлемую для подтверждающего анализа гипотезу. Шестиугольная конфигурация, образуемая координатами из табл. 8.4, предложена на основе шестиугольной модели типов профессий [Holland, 1973]; эта гипотеза может служить примером гипотезы, выведенной непосредственно из теории. Координаты из табл. 8.4 были использованы в подтверждающем многомерном шкалировании, основанном на неметрической евклидовой модели (см. гл. 5). В процессе анализа получено итоговое значение стресса $S_1 = 0,17$. Как оценивать значение этой статистики? Иными словами, хорошее ли соответствие?

Общепринятого способа оценки самой величины статистики подтверждающего соответствия нет, но можно дать относительную интерпретацию значений таких статистик. Например, если есть две или более гипотезы, которые одинаково хорошо определены, то эти гипотезы можно сравнить с помощью их статистик соответствия. Выражение «одинаково хорошо определены» означает, что число координат, которое следует оценить, для обеих гипотез одинаково. Или, если есть две генеральные совокупности и выборки данных о сходстве каждой из них, то можно сравнить соответствие этой гипотезе двух совокупностей.

В [Ramsay, 1978, 1980] описаны эксперименты с тестами соответствия хи-квадрат, которые могут быть использованы в подтверждающем многомерном шкалировании. В конечном счете тесты значимости могут обеспечить наиболее полезный способ оценки гипотез в подтверждающем подходе. Однако в настоящее время их практическая полезность в реальных приложениях многомерного шкалирования остается в значительной степени непроверенной. Пока не появились более со-

вершенные методы интерпретации таких статистик, подтверждающие статистики соответствия лучше всего интерпретируются относительно, а не абсолютно.

ВЫВОДЫ

Исследователь очень редко применяет многомерное шкалирование без каких-либо априорных гипотез относительно конфигурации или координатных осей. Если начать с гипотез о признаках стимулов, то для их проверки можно использовать значения по этим признакам. Корреляций этих признаков с осями может быть достаточно в случае, когда решение нельзя повернуть без потери соответствия данным. Для того чтобы подтвердить признаковую гипотезу, значения по этому признаку должны высоко (обычно выше 0,70) и значимо коррелировать с одной из координатных осей. В идеале они должны коррелировать с одной и только одной осью. Координатная ось, высоко коррелирующая со значениями гипотетического признака, имеет явную интерпретацию, соответствующую этому признаку.

Когда решение можно поворачивать, то для проверки гипотез относительно признаков применяют множественный регрессионный анализ. Значения признака служат выходной переменной, а координатные оси стимулов — входными. Квадрат коэффициента множественной корреляции равен доле дисперсии этого признака, которая может быть объяснена оптимально повернутыми координатными осями стимулов. Для того чтобы подтвердить признаковую гипотезу, коэффициент множественной корреляции должен быть высоким — обычно выше 0,75 — и статистически значимым. Если можно найти K признаков, слабо коррелированных друг с другом и имеющих высокую множественную корреляцию с координатными осями, то стандартизованные регрессионные веса K можно использовать для такого поворота координатных осей, чтобы каждая из них соответствовала одному из признаков.

В [Schönemann and Carroll, 1970; Gower; 1971, 1975] обсуждается схема поворота, которая может служить основой для сравнения полученной конфигурации стимулов с гипотетической. Она может также стать основой для сравнения двух полученных конфигураций. В качестве первого этапа схема включает такую стандартизацию координатных осей в целевой и полученной конфигурациях, при которой среднее значение координат стимулов по каждой оси равно нулю. Затем следует оценить мультипликативную константу и матрицу преобразования, минимизирующие сумму квадратов разностей между соответствующими координатами целевой конфигурации и повернутой полученной конфигурации стимулов.

Согласованность между гипотетической и полученной конфигурациями можно оценить путем вычисления корреляции между координатами в гипотетической конфигурации и повернутой полученной конфигурации. Статистика согласованности облегчает сравнение совокупно-

стей для определения того, в какой из них можно получить наибольшее соответствие гипотетической конфигурации. Она также упрощает сравнение гипотетических конфигураций для оценки того, какая из них больше всего согласуется с полученной. Если координатные оси гипотетической целевой матрицы явно интерпретируемы и статистика согласованности велика, то для построения такого поворота полученной конфигурации, после которого каждая координатная ось будет иметь ту же интерпретацию, что и та же координатная ось гипотетической конфигурации, можно использовать матрицу преобразования из [Schönemann-Carroll, 1970].

Коэффициенты согласованности дают один набор способов проверки гипотезы относительно конфигурации. Другой набор способов представлен методами подтверждающего шкалирования. В одном из видов подтверждающего многомерного шкалирования некоторые из координат определены, а оставшиеся координаты оцениваются. Полученная мера соответствия указывает, до какой степени данные могут быть воспроизведены в пределах установленных гипотезой координат конфигурации. Хотя общепринятого метода абсолютной оценки величины подтверждающей статистики не существует, такие методы можно использовать для сравнения двух одинаково хорошо определенных гипотез или для сравнения соответствия гипотезе в двух различных совокупностях.

ЗАДАЧИ

1. В столбцах 3 и 4 табл. 8.5 показаны координаты стимулов для девяти составов семьи из табл. 7.2. В столбце 5 приведено число детей при каждом составе семьи. В столбце 6 представлена доля девочек. (Для первого состава семьи доля девочек была принята равной 0,5.) С помощью множественного регрессионного анализа и данных из табл. 8.5 выполните проверку гипотезы, что число детей и доля девочек будут служить координатными осями полученной конфигурации.

Таблица 8.5 Значения стимулов по координатным осям и признаковым переменным для данных о составе семьи

Состав семьи		Координатная ось		Число детей	Доля девочек
число девочек	число мальчиков	I	II		
0	0	-0,873	-0,716	0	0,500
0	1	-0,726	-0,028	1	0,000
0	2	-0,531	0,966	2	0,000
1	0	-0,040	-0,774	1	1,000
1	1	-0,154	0,033	2	0,500
1	2	0,079	0,853	3	0,333
2	0	0,647	-0,967	2	1,000
2	1	0,592	-0,165	3	0,667
2	2	1,025	0,443	4	0,500

а) Чему равны коэффициенты множественной корреляции? Значимы ли они на уровне 0,01?

б) Подтверждают ли коэффициенты множественной корреляции гипотезы относительно числа детей и доли девочек? Почему?

в) Чему равны стандартизованные регрессионные веса, полученные в двух регрессионных расчетах?

г) Используйте стандартизованные регрессионные веса из задачи 1 в) и коэффициенты множественной корреляции из задачи 1 а) для построения такой матрицы преобразования \widehat{T} , что после поворота координатная ось I будет соответствовать числу детей, а координатная ось II — доле девочек.

д) С помощью найденного в задаче 1 г) преобразования постройте повернутую матрицу координат \widehat{X}^*

2. Пусть столбцы 3 и 4 табл. 8.5 будут полученной матрицей координат стимулов \widehat{X} . Стандартизуйте столбцы 5 и 6 таким образом, чтобы среднее значение обоих столбцов было равно 0. Пусть эти стандартизованные переменные служат гипотетической конфигурацией Y. Затем:

а) найдите $\widehat{X}'Y$;

б) возьмите результат задачи 2а), $\widehat{X}'Y$, умножьте его слева на транспонированную матрицу $Y'\widehat{X}$ и получите $A = Y'\widehat{X}\widehat{X}'Y$;

в) используйте какую-либо программу факторного анализа для получения 2×2 матрицы B — неповернутой матрицы главных компонент, удовлетворяющей условию $A = BB'$. Чему равна B? Чему равна D, диагональная матрица, построенная из соответствующих собственных значений?

г) найдите $D^{-3/2}$;

д) найдите $BD^{-3/2}B'$;

е) умножьте слева результат задачи 2 д), $BD^{-3/2}B'$, на результат задачи 2а), $\widehat{X}'Y$, и получите $\widehat{T} = (\widehat{X}'Y)(BD^{-3/2}B')$;

ж) умножьте справа \widehat{X} на \widehat{T} для получения \widehat{X}^* ;

з) найдите $r(Y, \widehat{X})$

ОТВЕТЫ

1. а) Для гипотезы о числе детей $R = 0,99$. Соответствующая F-статистика для нулевой гипотезы $R = 0$ есть $F_{(2,6)} = 209,30$, $p < 0,01$. Для гипотезы относительно доли девочек $R = 0,91$, $F_{(2,6)} = 14,46$, $p < 0,01$.

б) Коэффициенты множественной корреляции подтверждают гипотезы относительно числа детей и доли девочек. Оба коэффициента намного больше 0,75 и значимы на уровне 0,01.

в) Для гипотезы относительно числа детей $b_I = 0,82$, $b_{II} = 0,56$

Соответствующие числа для гипотезы относительно доли девочек — $b_I = 0,53$ и $b_{II} = -0,74$

г)

	Число детей	Доля девочек
$\widehat{T} =$	I [0,83	0,57]
	II [0,58	-0,81]

Число Доля
детей девочек

$$д) \widehat{X} = \begin{bmatrix} -1,14 & 0,08 \\ -0,62 & -0,39 \\ 0,12 & -1,09 \\ -0,48 & 0,60 \\ -0,11 & -0,11 \\ 0,56 & -0,65 \\ -0,02 & 1,15 \\ 0,40 & 0,47 \\ 1,11 & 0,23 \end{bmatrix}$$

$$2. а) \widehat{X}' Y = \begin{bmatrix} 5,233 & 1,018 \\ 3,808 & -1,510 \end{bmatrix}$$

$$б) A = (Y' \widehat{X}) (\widehat{X}' Y) = \begin{bmatrix} 41,885 & -0,423 \\ -0,423 & 3,316 \end{bmatrix}$$

$$в) B = \begin{bmatrix} 6,472 & 0,020 \\ -0,071 & 1,820 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 41,890 & 0,000 \\ 0,000 & 3,311 \end{bmatrix}$$

$$г) D^{(-3/2)} = \begin{bmatrix} 0,004 & 0,000 \\ 0,000 & 0,166 \end{bmatrix}$$

$$д) B (D^{-3/2}) B' = \begin{bmatrix} 0,168 & 0,004 \\ 0,006 & 0,550 \end{bmatrix}$$

$$е) \widehat{T} = \begin{bmatrix} 0,885 & 0,580 \\ 0,631 & -0,815 \end{bmatrix}$$

$$ж) \widehat{X}^* = \begin{bmatrix} -1,22 & 0,08 \\ -0,66 & -0,40 \\ 0,14 & -1,10 \\ -0,52 & 0,61 \\ -0,12 & -0,12 \\ 0,61 & -0,65 \\ -0,04 & 1,16 \\ 0,42 & 0,48 \\ 1,19 & 0,23 \end{bmatrix}$$

$$з) r(Y, \widehat{X}) = 0,87.$$

В этой главе рассматривается связь многомерного шкалирования с другими методами, применяемыми в социологии и науках о поведении. В первом параграфе обсуждаются алгоритмы неметрического многомерного шкалирования для оценки шкальных значений в одномерном методе шкалирования Терстоуна [Thurstone, 1927] — методе парных сравнений. Во втором параграфе многомерное шкалирование сопоставляется с иерархическим кластер-анализом. В третьем проводится сравнение многомерного шкалирования и факторного анализа.

МНОГОМЕРНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ И ШКАЛИРОВАНИЕ ТЕРСТОУНА

Л. Терстоун [Thurstone, 1927; Torgerson, 1958] предложил шкалирование стимулов на одномерном континууме. Его метод известен как метод парных сравнений*. Испытуемым предъявляют все возможные пары стимулов и просят выбрать тот из них, который согласно их оценке обладает большим значением шкалируемого признака. Ответы испытуемых позволяют построить матрицу P , такую, как приведенная в табл. 9.1. Эти данные получены при исследовании, в котором предъявлялись пары овощей. В каждой паре испытуемые выбирали предпочитаемый ими овощ. Элемент p_{ij} в строке i , столбец j , представляет долю предпочитающих стимул j стимулу i . Шкалируемый одномерный континуум является в этом случае осью предпочтения.

Л. Терстоун [Thurstone, 1927] предполагал, что у каждого стимула на шкалируемой оси есть шкальное значение x_i . В так называемом «случае 5 Терстоуна», когда его модель применяется наиболее часто, предполагается, что вероятность предпочтения стимула j стимулу i в имеющейся доле случаев p_{ij} будет иметь вид:

$$p_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{(x_j - x_i)} e^{-t^2/2} dt. \quad (9.1)$$

* Метод парных сравнений посвящена монография [Дэвид, 1978]. — Примеч. пер.

Таблица 9.1. Матрица Р, показывающая долю субъектов, которые предпочли стимул-столбец стимулу-строке, и полученная из Р матрица различий Δ

Овощи	Матрица Р								
	турнепс	капуста	свекла	спаржа	морковь	шпинат	фасоль	бобы	зерно
Турнепс	—	0,818	0,770	0,811	0,878	0,892	0,899	0,892	0,926
Капуста	0,182	—	0,601	0,723	0,743	0,736	0,811	0,845	0,858
Свекла	0,230	0,399	—	0,561	0,736	0,676	0,845	0,797	0,818
Спаржа	0,189	0,277	0,439	—	0,561	0,588	0,676	0,601	0,730
Морковь	0,122	0,257	0,264	0,439	—	0,493	0,574	0,709	0,764
Шпинат	0,108	0,264	0,324	0,412	0,507	—	0,628	0,628	0,628
Фасоль	0,101	0,189	0,155	0,324	0,426	0,372	—	0,527	0,642
Бобы	0,108	0,155	0,203	0,399	0,291	0,318	0,473	—	0,628
Зерно	0,074	0,142	0,182	0,270	0,236	0,372	0,358	0,372	—

Матрица различий Δ

Овощи	Турнепс	Капуста	Свекла	Спаржа	Морковь	Шпинат	Фасоль	Бобы	Зерно
Турнепс	—								
Капуста	0,318	—							
Свекла	0,270	0,101	—						
Спаржа	0,311	0,223	0,061	—					
Морковь	0,378	0,243	0,236	0,061	—				
Шпинат	0,392	0,236	0,176	0,088	0,007	—			
Фасоль	0,399	0,311	0,345	0,176	0,074	0,128	—		
Бобы	0,392	0,345	0,297	0,101	0,209	0,182	0,027	—	
Зерно	0,426	0,358	0,318	0,230	0,264	0,128	0,142	0,128	—

Значения шкалы Терстоуна

-2,029	-0,955	-0,684	-0,016	0,265	0,320	0,846	0,936	1,318
--------	--------	--------	--------	-------	-------	-------	-------	-------

Значения неметрической многомерной шкалы

-2,210	-0,661	-0,671	-0,028	0,320	0,288	0,814	0,881	1,267
--------	--------	--------	--------	-------	-------	-------	-------	-------

Источник [Guilford J. P., 1954]. Перепечатано с разрешения издателя.

Формула (9.1) — это функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Она показывает, что p_{ij} равна доле площади под нормальной кривой, которая находится левее стандартной величины $z = (x_j - x_i)$ при стандартном нормальном распределении. В работе [Torgerson, 1958] предложены различные методы оценки шкальных значений x_i, x_j из оценок вероятностей p_{ij} , полученных в результате парных сравнений.

Многомерное шкалирование также позволяет оценивать эти шкальные значения. В [Davison and Wood, 1983] показано, что, если вероятности удовлетворяют (9.1), то величина

$$\delta_{ij} = |p_{ij} - 0.50| \quad (9.2)$$

является монотонно возрастающей функцией расстояний между стимулами на шкалируемом континууме, т. е.

$$\delta_{ij} = f(d_{ij}) = f(|x_i - x_j|), \quad (9.3)$$

где f — монотонно возрастающая функция. Поэтому эмпирические оценки δ_{ij} можно использовать как меры различия на входе неметрического алгоритма.

Матрица Δ из табл. 9.1 — это матрица различий, полученная из вероятностей в P . Например, элемент в строке 2, столбец 1, матрицы Δ вычислен из соответствующего элемента в P следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{21} &= |p_{21} - 0,50| = \\ &= |0,182 - 0,500| = \\ &= 0,318. \end{aligned} \quad (9.4)$$

В нижней части табл. 9.1 содержатся шкальные значения, полученные из матрицы P по схеме Терстоуна [Thurstone, 1927]. Ниже значений шкалы Терстоуна приведены шкальные значения, полученные с помощью неметрического многомерного шкалирования в размерности 1, основанного на матрице различий. Коэффициент корреляции между двумя наборами шкальных значений равен 0,99*. Если использовать эмпирические оценки в (9.2) как данные о различии и если вероятности выбора удовлетворяют (9.1), то неметрическое многомерное шкалирование должно обеспечить по данным о парных сравнениях такие оценки шкальных значений, которые хорошо аппроксимируют оценки Терстоуна [Thurstone, 1927].

* Шкальные значения, полученные в результате применения к этой же матрице различий метода парного неметрического шкалирования (программы PARSUN) с Краскаловской и случайными стартовыми конфигурациями ($\theta = 0,053$ и $0,048$), также коррелируют со значениями шкалы Терстоуна. Коэффициент корреляции равен 0,99. — *Примеч. пер.*

МНОГОМЕРНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ И ИЕРАРХИЧЕСКИЙ КЛАСТЕР-АНАЛИЗ

Иерархический кластерный анализ и многомерное шкалирование — это методы, часто применяемые для исследования структуры стимулов. Они имеют довольно существенное сходство. Данные о близости можно исследовать как с помощью иерархического кластер-анализа, так и с помощью многомерного шкалирования. Оба метода основаны на дистанционной модели. В иерархическом кластер-анализе, так же как и при многомерном шкалировании, решение можно представить в виде координатных осей, хотя кластерные решения редко представляются таким образом.

Однако кластер-анализ и многомерное шкалирование имеют и большие различия. Во-первых, в кластерном анализе связь между данными о близости δ_{ij} и расстояниями d_{ij} не может быть, как в многомерном шкалировании, представлена линейной или даже монотонной функцией. Во-вторых, расстояния в кластер-анализе — это не расстояния в пространстве, как в многомерном шкалировании. Различие между расстояниями на дендрограмме или ультраметрическими расстояниями в иерархическом кластерном анализе и пространственными расстояниями в многомерном шкалировании будет рассмотрено ниже. В-третьих, в многомерном шкалировании оценки координат являются непрерывными переменными, а в кластер-анализе — дискретными.

Поскольку в иерархическом кластер-анализе решения обычно не представляют координатами стимулов, мы начнем обсуждение с более типичного способа представления кластерных решений — с группировок стимулов и дендрограмм. Затем мы проведем аналогию между дендрограммами и расстояниями, а также между группировками стимулов и координатной системой стимулов. В заключение исследуется связь между понятиями расстояния и координат стимулов в иерархическом кластер-анализе и в многомерном шкалировании. Неиерархические кластерные методы подробно представлены в литературе [Arabie and Carroll, 1980; Sarle, 1981; Sattath and Tversky, 1977; Shepard and Arabie, 1979]. Однако чаще всего в факторном анализе применяются иерархические методы, поэтому их мы и будем рассматривать.

Кластер стимулов — это любое подмножество стимулов. Цель иерархического кластера-анализа заключается в том, чтобы разделить стимулы на подмножества, каждое из которых соответствует существенной характеристике стимулов. В иерархическом кластерном решении два любых различных подмножества A и B должны быть связаны одним из трех способов: $A \cap B = A$, $A \cap B = B$, $A \cap B = \emptyset$ (\emptyset обозначает пустое множество). Иными словами, возможны три варианта: элементы B должны включать все элементы A , элементы A должны включать все элементы B , A и B не должны иметь общих элементов. Эти два множества не могут частично перекрываться.

На рис. 9.1 показана дендрограмма, представляющая кластерную структуру 16 фонем согласных (см. рис. 5.8). Диаграмма состоит из вершин (кружков) и ребер (линий), соединяющих вершины. Вершины 1—16, называемые заключительными вершинами, представляют тривиальные кластеры, состоящие только из одного стимула. Вершины 17—29 представляют нетривиальные кластеры. Кластер, соответствующий любой вершине, включает все стимулы, связанные с этой верши-

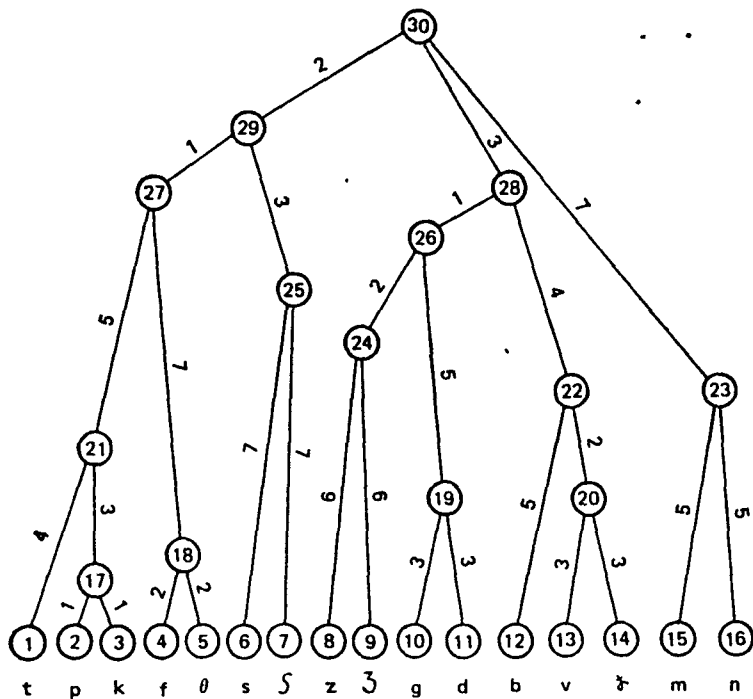


Рис 9.1. Дендрограмма, представляющая структуру кластеров 16 фонем согласных. Адаптировано из [Shepard, 1972 b] Использовано с разрешения издателя

ной непосредственно или через другие вершины. Например, кластер, соответствующий вершине 17, включает стимулы |p| и |k|, так как вершина 17 связана с заключительными вершинами этих двух стимулов. Вершина 29 соответствует кластеру, содержащему |t|, |p|, |k|, |f|, |θ|, |s| и |ʃ|, так как вершина 29 соединена через другие вершины с заключительными вершинами этих семи стимулов. На каждом ребре есть число, устанавливающее вертикальную высоту этого ребра. Высота любой вершины (кроме заключительной, высота которой 0) — это сумма высот ребер, связывающих эту вершину с какой-либо заключи-

тельной вершиной. Например, если пройти по ребрам, связывающим заключительную вершину 11 (стимул $|d|$) с вершиной 26, то объединенные высоты этих ребер равны восьми, т. е. высота вершины 26 равна восьми. Для того чтобы определить высоту вершины 26, можно начинать с любой заключительной вершины (вершины 8—11). Мы придем к одному и тому же выводу. Аналогично, начав с любой из вершин 1—5, определим, что высота вершины 27 равна девяти.

В дендрограмме расстояние между двумя стимулами представлено высотой самой низкой из соединяющих их вершин. Например, на рис. 9.1 расстояние между стимулами $|f|$ и $|g|$ равно двум, так как высота первой соединяющей их вершины (вершина 18) равна двум. Расстояние между стимулами $|z|$ и $|d|$ равно восьми, так как высота первой соединяющей их вершины (вершина 26) равна восьми.

Существует координатное представление любой структуры типа изображенной на рис. 9.1. Набор координат будет содержать по одной оси для каждой вершины, кроме самой высокой (вершины 30 на рис. 9.1). Пусть x_k — вертикальная высота ребра, ведущего вверх от вершины k в дендрограмме, представляющей кластерную структуру. Координата стимула i по оси k определяется так:

$$\begin{aligned} x_{ik} &= 0, \text{ если стимул } i \text{ не входит в кластер } k, \\ x_{ik} &= \frac{1}{2} x_k, \text{ если стимул } i \text{ входит в кластер } k. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Если координаты имеют вид (9.5), то шкальные значения по любой координатной оси будут только двумя числами; поэтому каждая координатная ось — дихотомическая переменная.

Расстояние между двумя стимулами в дендрограмме может быть записано через определенные в (9.5) координаты:

$$d_{ij} = \sum_k |x_{ik} - x_{jk}|. \quad (9.6)$$

Расстояния (9.6) по дендрограмме — это расстояния в метрике города, определенные на дихотомических координатных осях.

Приведенный выше пример иллюстрирует некоторые противоречия между представлением структуры в многомерном шкалировании и иерархическом кластер-анализе. Во-первых, в кластерном представлении координаты — дихотомические переменные, а в многомерном шкалировании координаты — непрерывные переменные. Во-вторых, на практике число дихотомических координатных осей для представления данных часто очень велико. Иными словами, в то время как иерархический кластер-анализ для представления структуры часто требует большого числа для простых, двузначных координатных осей, в многомерном шкалировании для той же цели необходимо небольшое число сложных многозначных координатных осей.

Существует и еще одно различие между расстояниями в многомерном шкалировании и иерархическими кластерными расстояниями. Кроме неравенства треугольника, иерархические кластерные расстоя-

ния должны удовлетворять более сильному ультраметрическому неравенству [Hartigan, 1967; Holman, 1972; Jardine et al., 1967; Johnson, 1967]:

$$d(a, c) \leq \max [d(a, b), d(b, c)]. \quad (9.7)$$

Поскольку иерархический кластер-анализ и многомерное шкалирование используют разные представления структур, они часто рассматриваются как дополняющие друг друга методы, проясняющие разные черты стимулов. Наиболее сложные стимулы изменяются как по дискретным, так и по непрерывным переменным. Люди, например, различаются по таким непрерывным переменным, как возраст и уровень умственного развития, и по дискретным переменным, таким, как пол и цвет глаз. Если все важные характеристики стимулов дихотомические или непрерывные, то один из этих методов превосходит другой. Но даже если все признаки стимулов дискретные, многомерное шкалирование часто дает возможность получить удобный способ сжатия данных к такому виду, при котором кластерная структура может быть представлена наглядно, как на рис. 5.8. Однако в большинстве случаев одна часть характеристик стимулов непрерывная, а другая дискретная, так что ни один метод явно не превосходит другой. Кластерный анализ и многомерное шкалирование являются альтернативными методами представления дополняющих друг друга характеристик стимулов.

Поскольку многие сложные стимулы различаются как по дискретным, так и по непрерывным переменным, кажется естественным создание гибридных моделей, представляющих комбинацию дискретных и непрерывных координат. Подобные гибридные модели обсуждаются в [Degerman, 1970; Carroll, 1976], но они до сих пор почти не применялись. Надеемся, что в будущем постоянные эксперименты с этими методами приведут к комбинации дискретных и непрерывных координатных осей. Читателю, интересующемуся более подробными сведениями о кластерном анализе, следует обратиться к [Anderberg, 1973; Hartigan, 1975; Sneath and Sokal, 1973]*. В [Kruskal, 1977] проведено более детальное сравнение многомерного шкалирования с кластерным анализом.

МНОГОМЕРНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ И ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Многомерное шкалирование ближе к факторному анализу **, чем к кластер-анализу. Основные данные при большинстве методов факторного анализа — меры близости пар объектов. На практике объекта-

* См. также [Айвазян и др., 1974; Браверман и Мучник, 1983; Дорофеюк, 1971; Дюран и Оделл, 1977; Классификация и кластер, 1980]. — *Примеч. пер.*

** Факторному анализу посвящены также работы [Браверман и Мучник, 1983; Жуковская и Мучник, 1976; Иберла, 1980; Йереског и др., 1980; Окунь, 1974; Лоули и Максвелл, 1967; Харман, 1972]. — *Примеч. пер.*

ми служат психологические тесты или тестовые вопросы, а мерами близости — коэффициенты корреляции. Как и многомерное шкалирование, факторный анализ позволяет получить количественное координатное представление структуры взаимосвязей между объектами.

Учитывая сказанное, не следует удивляться тому, что многомерное шкалирование и факторный анализ часто применяются для исследования одних и тех же проблем. С помощью многомерного шкалирования и факторного анализа были изучены координатные оси межличностного восприятия, структуры человеческих способностей, организации городской среды. Можно найти и много других примеров.

Р. Шепард [Shepard, 1972a] отмечает, что в неметрическом многомерном шкалировании для представления структуры часто достаточно небольшого числа координатных осей. В некоторых исследованиях по факторному анализу извлекается десять и более факторов. «Такие результаты, естественно, не могут быть явно изображены в виде наглядной картинки» [Shepard, 1972a, p. 3]. С другой стороны, «размерности (и наглядности) при применении этих относительно новых методов многомерного шкалирования на практике иные, чем в родственных им методах, которые давно применяются в социологии под такими названиями, как «факторный анализ» или «анализ главных компонент» [Shepard, 1972a, p. 2]. К тому же выводу пришли А. Шлезингер и Л. Гуттман [Schlesinger and Guttman, 1969].

В работе [MacCallum, 1974a] сравнение с многомерным шкалированием ограничено методами многомерного шкалирования, описанными в гл. 4 и 5: метрической моделью Торгерсона и неметрическими моделями. Автор подчеркивает тот факт, что решения задач многомерного шкалирования позволяют получить только количественные координатные описания объектов. Факторный анализ обеспечивает, кроме того, количественное координатное описание субъектов в виде оценок значений факторов. «В общем, модель, на которой основан факторный анализ, намного богаче, чем модель, на которой основано многомерное шкалирование, так как она способна описывать индивидуальные различия» [MacCallum, 1974a, p. 512]. Сравнение факторного анализа с многомерным шкалированием индивидуальных различий к такому выводу не приведет.

В случае, когда факторный анализ и многомерное шкалирование применяются для исследования одной и той же проблемы, есть три причины, по которым выводы могут различаться, причем две из них не имеют никакого отношения к методу анализа данных. Во-первых, в исследованиях могут применяться различные меры сходства объектов. Факторный анализ предпочитает коэффициенты корреляции. Для многомерного шкалирования применяются, помимо коэффициента корреляции, меры различия профилей, прямые оценки различий и совместные или условные вероятности.

Во-вторых, применительно к одной и той же ситуации факторный анализ и многомерное шкалирование часто предполагают различные

экспериментальные процедуры. Это может быть основным источником различий между исследованиями, проведенными методами факторного анализа и методами многомерного шкалирования. Например, в исследовании характеристик служебных обязанностей [Smith and Siegel, 1967] испытуемых просили оценивать сходство пар служебных заданий. В большинстве исследований характеристик служебных обязанностей методами факторного анализа применялись другие экспериментальные процедуры. Менеджеры оценивали качество работы подчиненных по различным шкалам. Факторы, необходимые для воспроизведения корреляций между шкалами, служили представлением характеристик служебных обязанностей.

В-третьих, еще один источник различия — сами методы анализа данных. Как факторный анализ, так и многомерное шкалирование позволяют представить структуру стимулов в виде пространственных координат. Эти координаты в факторном анализе называются факторными нагрузками, а в многомерном шкалировании — шкальными значениями. Однако модель факторного анализа и модель многомерного шкалирования содержат разные предположения о связи между координатами и полученными данными о близости. Например, в анализе главных компонент предполагается, что корреляции r_{ij} (или какие-то другие меры близости) связаны с координатами x_{ik} и x_{jk} функцией следующего вида:

$$r_{ij} = \sum_k x_{ik} x_{jk}. \quad (9.8)$$

С другой стороны, в метрическом многомерном шкалировании предполагается, что различия связаны с координатами функцией, приведенной в формуле (4.1).

Подобные предположения о данных и должны обуславливать неодинаковые результаты. Но какие именно будут различия? Автору неизвестны исследования того, какие же различия могут вообще возникнуть при применении к одним и тем же данным многомерного шкалирования и факторного анализа. Сравнение двух исследований структуры профессиональных интересов [Hanson et al., 1977; Rounds et al., 1979], в одном из которых применялось многомерное шкалирование, а в другом — факторный анализ, является примером того, как сравнивать два решения. Эти исследования рассмотрены ниже.

Исследования шкал профессиональных интересов с помощью многомерного шкалирования и факторного анализа

Как обсуждалось в гл. 5, теория выбора профессий Холланда [Holland, 1973] описывает шесть типов профессий и шесть соответствующих типов интересов. Различные каталоги профессиональных инте-

ресов включают теперь отдельные шкалы для каждого типа. В [Hanson et al., 1977; Prediger, 1980] описан факторный анализ корреляций шести шкал Холланда из различных каталогов профессиональных интересов и при различных выборках. Результаты меняются от выборки к выборке и от каталога к каталогу, но три фактора возникают достаточно согласованно. Второй и третий факторы называются в [Prediger, 1980] осями, основанными на теории. На плоскости, определенной этими двумя факторами, шесть шкал образуют примерно шестиугольную конфигурацию, предсказанную теорией Холланда. В [Hanson et al., 1977] первый фактор называется фактором уровня ответа: «Не показан ... общий фактор, одинаковый для каталогов интересов с такими значениями ответов, как «нравится», «безразлично», «не нравится». При таких категориях частоты выбора каждого из ответов имеют тенденцию изменяться от субъекта к субъекту вне зависимости от содержания вопроса, т. е. некоторые опрашиваемые склонны чаще выбирать ответ «безразлично» и т. д. Поэтому существует общий фактор, связанный с ответами, влияющий на оценки по каждой шкале. Основная идентифицирующая характеристика этого фактора (мы назовем его «фактор уровня ответа») следующая: нагрузки всех шкал интересов на него относительно высокие [Hanson et al., 1977, p. 20].

В работе [Rounds et al., 1979] анализировались пять наборов коэффициентов корреляции между шестью шкалами Холланда из различных вопросников. Только в одном из пяти случаев понадобилось более двух координатных осей для того, чтобы сделать стресс меньшим 0,05. Но даже и в этой ситуации стресс в двумерном решении был меньше 0,06. В размерности 2 шкалы согласованно образовывали примерно шестиугольную конфигурацию, хотя она отличалась от шестиугольника для выборки женщин больше, чем для выборки мужчин. Иными словами, конфигурация, найденная в [Rounds et al., 1979] методами многомерного шкалирования, напоминает конфигурацию из [Hanson et al., 1977] на плоскости, определенной двумя теоретическими факторами. Многомерное шкалирование в [Rounds et al., 1979] не дало ничего похожего на фактор уровня ответа из [Hanson et al., 1977].

Для противопоставления этих двух исследований рассмотрим данные из табл. 9.2. Факторные нагрузки в этой таблице (столбцы 2, 4 и 6) были получены в результате применения к корреляциям шести шкал каталога предпочтения профессий (см. табл. 5.1) анализа главных компонент без поворота.

Шкальные значения в столбцах 3 и 5 найдены с помощью двумерного неметрического шкалирования тех же данных. Они были повернуты к главным осям. Затем каждое шкальное значение было умножено на — 0,59. Первоначальное решение до умножения на — 0,59 приведено в табл. 5.2.

Столбец «Фактор 1» в табл. 9.2 содержит общий фактор. Этот фактор явно обладает характеристикой «нагрузки всех шкал интересов на него относительно высокие» [Hanson et al., 1977]. У этого фактора нет

дели процесса [Davison, 1977; Humphreys, 1960; Humphreys and Parsons, 1979; Jöreskog, 1970]. Хотя на глаз предсказанные этими моделями процесса корреляционные образцы кажутся одинаковыми, они имеют тонкие различия.

Неметрическое многомерное шкалирование позволяет наиболее удобным способом определить, объясняются ли корреляции одномерным упорядочением, и, если да, то каково это упорядочение. Вне зависимости от того, какая из моделей процесса объясняет корреляции наилучшим образом, одномерная конфигурация, полученная методами многомерного шкалирования, должна хорошо соответствовать корреляциям. Действительно, если корреляции соответствуют (9.9), то к ним можно подогнать одномерную дистанционную модель*. Скрытое одномерное упорядочение переменных должно соответствовать их упорядочению по этой оси.

Факторный анализ не позволяет обнаружить одномерного упорядочения, но может выявить различия между моделями процесса. Все модели ведут к предсказанию разных факторных структур [Davison, 1977; Jöreskog, 1970]. В то время как для объяснения данных, возникающих в любой из моделей процесса, при многомерном шкалировании требуется только одна координатная ось, для объяснения корреляций между I переменными необходимо от 2 до $I-1$ факторов. В отличие от многомерного шкалирования методы факторного анализа чувствительны к тонким различиям между моделями процесса. Такая чувствительность важна для тех, кто намерен различать модели процесса, но не для тех, кто пытается определить упорядочение переменных.

ВЫВОДЫ

Исследователи могут применять многомерное шкалирование для оценки шкальных значений по данным о парных сравнениях. Если p_{ij} — доля сравнений, при которых стимул j предпочтен стимулу i , то эмпирическая оценка различий стимулов i и j — $|p_{ij} - 0,50|$. Если данные достаточно удовлетворяют предположениям для случая пять Терстоуна [Thurstone, 1927], то применение к ним неметрического многомерного шкалирования приведет к шкальным значениям, хорошо приближающим оценки Терстоуна.

Как многомерное шкалирование, так и иерархический кластер-анализ позволяют получить представление структуры стимулов по данным о близости. Кластерное решение представляет структуру стимулов в виде качественных группировок стимулов. При многомерном шкалировании получают количественное координатное представление.

* Неметрическое шкалирование данных табл. 9.3 в одномерном пространстве с помощью программы PARSUN с Краскаловской и случайной стартовыми конфигурациями приводит к конфигурациям с небольшими значениями θ ($< 0,001$), для которых порядок стимулов по оси совпадает с порядком их номеров, т. е. номеров строк табл. 9.3. — *Примеч. пер.*

Среди различных методов представления структуры стимулов факторный анализ больше других напоминает многомерное шкалирование. И многомерное шкалирование, и факторный анализ дают возможность построить количественное координатное представление стимулов. В [Shepard, 1972a] отмечено, что решение, полученное методом неметрического многомерного шкалирования, часто более простое и поэтому легче интерпретируемое. В [MacCallum, 1974a] сделан вывод, что найденные при факторном анализе оценки значений факторов и факторные нагрузки содержат больше информации, чем вычисленные при многомерном шкалировании координаты стимулов. Модели индивидуальных различий не менее богаты, чем факторные модели.

Многомерное шкалирование и факторный анализ часто различаются по применяемым экспериментальным процедурам и мерам сходства. Если многомерное шкалирование и факторный анализ приводят при исследовании одной и той же проблемы к неодинаковым выводам, то в некоторых случаях это можно объяснить различием в экспериментальных процедурах, а не в методах анализа данных.

Сравнение анализа главных компонент [Hanson et al., 1977] и многомерного шкалирования [Rounds et al., 1979] показывает, что факторное решение более сложно. В анализе главных компонент все время появляется общий фактор, который не имеет аналога среди координатных осей многомерного шкалирования. Вторая и третья главные компоненты хорошо согласуются с полученными при многомерном шкалировании координатными осями, т. е. шкалы интересов образуют примерно одинаковые конфигурации на плоскости, построенной на второй и третьей главных компонентах, и на плоскости, определенной координатными осями при многомерном шкалировании.

Многомерное шкалирование и факторный анализ применяются для изучения корреляционных матриц типа «симплекс». Для этих матриц предложены различные модели процесса. В зависимости от того, какой процесс приводит к матрице типа «симплекс», может потребоваться от 2 до $I - 1$ факторов. В неметрическом многомерном шкалировании такую корреляционную матрицу всегда можно объяснить с помощью одной координатной оси. Факторный анализ чувствителен к различиям моделей процессов, а при неметрическом многомерном шкалировании такие различия обнаружить нельзя.

- Adkins, D. C. (1973). A simpler structure of the American Psychological Association. *American Psychologist*, 28, 47—54.
- Anderberg, M. R. (1973). Cluster analysis for applications. New York: Academic.
- Arabie, P. (1973). Concerning Monte Carlo evaluations of nonmetric multidimensional scaling algorithms. *Psychometrika* 38, 607—608.
- Arabie, P. (1978). Random versus rational strategies for initial configurations in nonmetric multidimensional scaling. *Psychometrika* 43, 111—113, 119.
- Arabie, P. and Boorman S. A. (1973). Multidimensional scaling of measures of distance between partitions. *Journal of Mathematical Psychology* 10, 148—203.
- Arabie, P. & Carroll, J. D. (1980). MAPCLUS: A mathematical programming approach to fitting the ADCLUS model. *Psychometrika*, 45, 211—235.
- Arnold, J. B. (1971). A multidimensional scaling study of semantic distance. *Journal of Experimental Psychology Monograph* 90, 349—372.
- Attneave, F. (1950). Dimensions of similarity. *American Journal of Psychology* 63, 516—556.
- Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972). Statistical inference under order restrictions. New York: Wiley.
- Bass, B. M., Cascio, W. F. and O'Connor, E. J. (1974). Magnitude estimation of frequency and amount. *Journal of Applied Psychology* 59, 313—320.
- Beals, R., Krants, D. H. and Tversky, A. (1968). Foundations of multidimensional scaling. *Psychological Review* 75, 127—142.
- Bechtel, G. G. (1976). *Multidimensional preference scaling*. The Hague, Netherlands: Mouton.
- Bechtel, G. G., Tucker, L. R. and Chang, W. A. (1971). A scalar product model for multidimensional scaling of choice. *Psychometrika* 36, 369—388.
- Bentler, P. M. and Weeks, D. G. (1978). Restricted multidimensional scaling models. *Journal of Mathematical Psychology* 17, 138—151.
- Bloxom, B. (1968). Individual differences in multidimensional scaling. *Research Bulletin* 68—45. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Bloxom, B. (1978). Constrained multidimensional scaling in N spaces. *Psychometrika* 43, 397—408.
- Borg, I. and Lingoes, J. C. (1980). A model and algorithm for multidimensional scaling with external constraints on the distances. *Psychometrika* 45, 25—38.
- Borman, W. C., Hough, L. M. and Dunnette, M. D. (1976). Development of behaviorally-based rating scales for evaluating the performance of U. S. Navy recruiters. (Technical Report NPRDC TR 76—31). San Diego, CA: Navy Personnel Research and Development Center.
- Byrne, D. (1971). *The attraction paradigm*. New York: Academic.
- Campbell, D. P. (1977). *Manual for the Strong-Campbell Interest Inventory* (2nd ed). Stanford, CA: Stanford.
- Carroll, J. D. (1972). Individual differences and multidimensional scaling. In: R. N. Shepard, A. K. Romney and S. B. Nerlove (Eds), *Multidimensional scaling: Theory and applications in the behavioral sciences* (Vol. I). New York: Seminar Press.

- Carroll, J. D. (1976). Spatial, non-spatial and hybrid models for scaling. *Psychometrika* 41, 439—470.
- Carroll, J. D. and Arabie, P. (1980) Multidimensional scaling. In: M. R. Rosenzweig and L. W. Porter (Eds), *Annual Review of Psychology* 31, 607—649.
- Carroll, J. D. and Chang, J. J. (1967). Relating preference data to multidimensional scaling via a generalization of Coombs' unfolding model. Paper presented at the meeting of Psychometric Society, Madison, WI, April.
- Carroll, J. D. and Chang, J. (1970). Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of «Eckart-Young» decomposition. *Psychometrika* 35, 283—319.
- Carroll, J. D. and Chang, J. J. (1972). IDIOSCAL (Individual Differences In Orientation Scaling): A generalization of INDSCAL allowing idiosyncratic reference systems as well as an analytic approximation to INDSCAL. Paper presented to the Psychometric Society, Princeton, NJ, March.
- Carroll, J. D., Pruzansky, S. and Kruskal, J. B. (1980). CANDELINC: A general approach to multidimensional analysis of many-way arrays with linear constraints on parameters. *Psychometrika* 45, 3—24.
- Carroll, J. D. and Wish, M. (1974a). Multidimensional perceptual models and measurement methods. In: E. S. Carterette and M. P. Friedman (Eds), *Handbook of perception* (Vol. 2). New York: Academic.
- Carroll, J. D. and Wish, M. (1974b). Models and methods for three-way multidimensional scaling. In: D. H. Krantz, R. C. Atkinson, R. D. Luce and P. Suppes (Eds). *Contemporary developments in mathematical psychology* (Vol. 2). San Francisco: W. H. Freeman.
- Clark, A. K. (1976). Re-evaluation of Monte Carlo studies in nonmetric multidimensional scaling. *Psychometrika* 41, 401—403.
- Cliff, N., Bradley, P. and Girard, R. (1973). The investigation of cognitive models for inventory responses. *Multivariate Behavioral Research* 8, 407—425.
- Cohen, H. S. and Davison, M. L. (1973). Jiffy-scale: A FORTRAN IV program for generating Rossordered pair comparisons. *Behavioral Science* 18, 76.
- Cohen, J. (1968). Multiple regression as a general data-analytic system. *Psychological Bulletin* 70, 426—443.
- Coombs, C. H. (1964). *A theory of data*. New York: Wiley.
- Coombs, C. H., McClelland, G. H. and Coombs, L. C. (1973). The measurement and analysis of family composition preferences. *Michigan Mathematical Psychology Program*, MMPP 73—5.
- Cooper, L. G. (1972). A new solution to the additive constant problem in metric multidimensional scaling. *Psychometrika* 37, 311—322.
- Cooper, L. G. (1973). A multivariate investigation of preferences. *Multivariate Behavioral Research* 8, 253—272.
- Coxon, A. P. M. and Jones, C. L. (1974a). Occupational similarities: Subjective aspects of social stratification. *Quality and Quantity* 22, 369—384.
- Coxon, A. P. M. and Jones, C. L. (1974b). Problems in selection of occupational titles. *The Sociological Review* 22, 369—384.
- Cronbach, L. J. (1955). Processes affecting scores on «understanding of others» and «assumed similarity». *Psychological Bulletin* 52, 177—193.
- Davison, M. L. (1972). An empirical comparison of card sorting and paired comparisons judgments as methods for gathering data in a multidimensional scaling study: An exploratory study. Unpublished masters thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Davison, M. L. (1976). Fitting and testing Carroll's weighted unfolding model for preferences. *Psychometrika* 41, 233—248.
- Davison, M. L. (1977). On a unidimensional, metric unfolding model for attitudinal and developmental data. *Psychometrika* 42, 523—548.
- Davison, M. L. (1980). DACAR: A FORTRAN program for fitting linear and distance models of preference. *Applied Psychological Measurement* 4, 419.
- Davison, M. L. (1985). Multidimensional scaling vs. components analysis of test

- intercorrelations. *Psychological Bulletin*, 92, 94—105.
- Davison, M. L. and Jones, L. E. (1976). A similarity-attraction model for predicting sociometric choice from perceived group structure. *Journal of Personality and Social Psychology* 33, 601—612.
- Davison, M. L., King, P. M., Kitchener, K. S., and Parker, C. A. (1980). The stage sequence concept in cognitive and social development. *Developmental Psychology* 16, 121—131.
- Davison, M. L., Robbins, S. and Swanson, D. (1978). Stage structure in objective moral judgments. *Developmental Psychology* 14, 137—146.
- Davison, M. L. and Wood, P. K. (1983). Fitting unidimensional choice models with nonmetric multidimensional scaling. *Applied Psychological Measurement*, 7, 333—340.
- Dawis, R. V., Lofquist, L. H. and Weiss, D. J. (1968). A theory of work adjustment: A revision. *Minnesota Studies in Vocational Rehabilitation* 23.
- De Leeuw, J. (1977). Correctness of Kruskal's algorithms for monotone regression with ties. *Psychometrika* 42, 141—144.
- De Leeuw, J. and Pruzansky, S. (1978). A new computational method to fit the weighted Euclidean distance model. *Psychometrika* 43, 479—490.
- Degerman, R. (1970). Multidimensional analysis of complex structure: Mixtures of class and quantitative variation. *Psychometrika* 35, 475—491.
- Dixon, W. J. and Brown, M. D. (Eds) (1979). *Biomedical computer programs. P-series*. Los Angeles: University of California.
- Forgas, J. P. (1979). Multidimensional scaling: A discovery method in social psychology. In: G. P. Ginsburg (Ed.), *Emerging strategies in social psychological research*. New York: Wiley — Interscience.
- Forgas, J. P., Kagen, C. and Frey, D. (1977). The cognitive representation of political personalities: A cross-cultural comparison. *International Journal of Psychology* 12, 19—30.
- Gower, J. C. (1966). Some distance properties of latent root and vector methods used in multivariate analysis. *Biometrika* 53, 325—388.
- Gower, J. C. (1971). Statistical methods of comparing different multivariate analyses of the same data. In: F. R. Hodson, D. G. Kendall and P. Tatu (Eds.), *Mathematics in the archaeological and historical sciences*. Edinburgh: Edinburgh University.
- Gower, J. C. (1975). Generalized Procrustes analysis. *Psychometrika* 40, 33—51.
- Gower, J. C. (1982). Euclidean distance geometry. *Mathematical Scientist* 7, 1—14.
- Green, P. E. (1978). *Mathematical tools for applied multivariate analysis*. New York: Academic.
- Green, P. E. and Carmone, F. J. (1972). Marketing research applications of nonmetric scaling methods. In: A. K. Romney, R. N. Shepard and S. B. Nerlove (Eds.), *Multidimensional scaling: Theory and application in the behavioral sciences (Vol. 2)*. New York: Seminar Press.
- Guilford, J. P. (1954). *Psychometric methods*. New York: McGraw-Hill.
- Guttman, L. (1954). A new approach to factor analysis: The radex. In: P. F. Lazarsfeld (Ed.), *Mathematical thinking in the social sciences*. Glencoe, IL: Free Press.
- Guttman, L. (1968). A general nonmetric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points. *Psychometrika* 33, 469—504.
- Hammond, K. R., Hursch, C. J. and Todd, F. J. (1964). Analyzing the components of clinical inference. *Psychological Review* 71, 438—456.
- Hanham, R. Q. (1976). Factorial ecology in space and time. *Environment and Planning* 8, 823—828.
- Hanson, G. R., Prediger, D. J. and Schussel, R. H. (1977). Development and validation of sex-balanced interest inventory scales. Iowa City, IA: The American College Testing Program (ACT Research Report 78).
- Harman, H. H. (1976). *Modern factor analysis (3rd ed.)*. Chicago: University of Chicago. Русский перевод со второго издания: Харман Г. Современный факторный анализ.— М.: Статистика, 1972.—486 с.

- Harshman, R. A. (1972a). Determination and proof of minimum uniqueness conditions for PARAFAC I. U.C.L.A., Working Papers in Phonetics 22, March.
- Harshman, R. A. (1972b). PARAFAC 2: Mathematical and technical notes. U.C.L.A., Working Papers in Phonetics 22, March.
- Hartigan, J. A. (1967). Representation of similarity matrices by trees. *Journal of the American Statistical Association* 62, 1140—1158.
- Hartigan, J. A. (1975). *Clustering algorithms*. New York: Wiley.
- Heiser, W. J. (1981). *Unfolding analysis of proximity data*. Leiden, The Netherlands: Reprodienst Psychologie.
- Hohn, F. E. (1973). *Elementary matrix algebra* (3rd ed.). New York: MacMillan.
- Holland, J. L. (1965). *Manual for the Vocational Preference Inventory* (6th ed.). Palo Alto, CA: Consulting Psychologists Press.
- Holland, J. L. (1973). *Making vocational choices: A theory of careers*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Holland, J. L., Whitney, D. R., Cole, N. S. and Richards, J. M., Jr. (1969). An empirical occupational classification derived from a theory of personality and intended for practice and research (ACT Research Report № 29). Iowa City, IA: The American College Testing Program.
- Holman, E. W. (1972). The relation between hierarchical and Euclidean models for psychological distances. *Psychometrika* 37, 417—423.
- Horan, C. B. (1969). Multidimensional scaling: Combining observations when individuals have different perceptual structures. *Psychometrika* 34, 139—165.
- Hubert, L. (1974). Problems in seriation using a subject-by-item response matrix. *Psychological Bulletin* 81, 976—983.
- Humphreys, L. G. (1960). Investigations of the simplex. *Psychometrika* 25, 313—323.
- Humphreys, L. G. and Parsons, C. K. (1979). A simplex process model for describing differences between cross-lagged correlations. *Psychological Bulletin* 86, 325—334.
- Isenberg, D. J. and Ennis, J. G. (1980). A comparison of derived and imposed dimensions of group structure. Unpublished manuscript, Harvard University.
- Jardine, C. J., Jardine, N. and Sibson, R. (1967). The structure and construction of taxonomic hierarchies. *Mathematical Biosciences* 1, 173—179.
- Johnson, P. E., Cox, D. L. and Curran, T. E. (1970). Psychological reality of physical concepts. *Psychonomic Science* 19, 245—247.
- Johnson, R. M. (1973). Pairwise nonmetric multidimensional scaling. *Psychometrika* 38, 11—18.
- Johnson, S. C. (1967). Hierarchical clustering schemes. *Psychometrika* 32, 241—254.
- Jones, L. E. and Young, F. W. (1972). Structure of a social environment: Longitudinal individual differences scaling of an intact group. *Journal of Personality and Social Psychology* 24, 108—121.
- Jöreskog, K. G. (1970). Estimation and testing of simplex models. *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 23, 121—145.
- Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, 23, 187—200.
- Kendall, D. G. (1971). Maps from marriages: An application of nonmetric multidimensional scaling to parish register data. In: F. R. Hodson, D. G. Kendall and P. Tatu (Eds.), *Mathematics in the archeological and historical sciences*. Edinburgh: Edinburgh University.
- Kohlberg, L. (1976). Moral stages and moralization: The cognitive-developmental approach. In: T. Lickona (Ed.), *Moral development and behavior*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Krantz, D. H. and Tversky, A. (1975). Similarity of rectangles: An analysis of subjective similarity. *Journal of Mathematical Psychology* 12, 4—34.
- Krumhansl, C. L. (1979). The psychological representation of musical pitch in a tonal context. *Cognitive Psychology* 11, 346—374.

- Kruskal, J. B. (1964). Multidimensional scaling by optimizing goodness-of-fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika* 29, 1—28, 115—129.
- Kruskal, J. B. (1977). The relationship between multidimensional scaling and clustering. In: J. Van Rousin (Ed.). *Classification and clustering*. New York: Academic. Русский перевод: Крускал Дж. Взаимосвязь между многомерным шкалированием и кластер-анализом//Классификация и кластер.— М.: Мир, 1980.— С. 20—41.
- Kruskal, J. B. and Carmone, F. (undated), How to use M-D-SCAL (Version 5M) and other useful information. Murray Hill, NJ: Unpublished manuscript, Bell Laboratories.
- Kruskal, J. B. and Carroll, J. D. (1969). Geometric models and badness-of-fit functions. In: P. R. Krishnaiah (Ed.), *Multivariate analysis* (Vol. 2), New York: Academic.
- Kruskal, J. B. and Wish, M. (1978), *Multidimensional scaling*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Kruskal, J. B., Young, F. W. and Seery, J. B. (1973). How to use KYST, a very flexible program to do multidimensional scaling and unfolding. Murray Hill, NJ: Unpublished manuscript, Bell Laboratories.
- Lee, S. and Bentler, P. M. (1980). Functional relations in multidimensional scaling. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 33, 142—150.
- Lingoes, J. C. (1973). The Guttman-Lingoes nonmetric program series. Ann Arbor, MI: Mathesis Press.
- Lingoes, J. C. and Borg, I. (1978). A direct approach to individual differences scaling using increasingly complex transformations. *Psychometrika* 43, 491—519.
- Lingoes, J. C. and Roskam, E. E. (1973). A mathematical and empirical analysis of two multidimensional scaling algorithms. *Psychometrika Monograph Supplement* 38, 1—93.
- Lingoes, J. C. and Schönemann, P. H. (1974). Alternative measures of fit for the Schönemann-Carroll matrix fitting algorithm. *Psychometrika* 39, 423—427.
- Loevinger, J. (1966). The meaning and measurement of ego development. *American Psychologist* 21, 195—206.
- MacCallum, R. C. (1974a). Relations between factor analysis and multidimensional scaling. *Psychological Bulletin* 81, 505—516.
- MacCallum, R. C. (1974b). A comparison of two individual differences models for multidimensional scaling: Carroll and Chang's INDSCAL and Tucker's three-mode factor analysis. Unpublished doctoral dissertation. University of Illinois.
- MacCallum, R. C. (1978). Recovery of structure in incomplete data by ALSCAL. *Psychometrika* 44, 69—74.
- MacCallum, R. C. (1979). 3-MODE-MDS: A computer program to execute Tucker's three-mode multidimensional scaling. *Applied Psychological Measurement* 3, 24.
- Mauser, G. A. (1972). A structural approach to predicting patterns of electoral substitution. In: A. K. Romney, R. N. Shepard and S. B. Nerlove (Eds.), *Multidimensional scaling: Theory and applications in the behavioral sciences* (Vol. 2). New York: Seminar Press.
- Mervis, C. B. and Rosch, E. (1981). Categorization of natural objects. In: M. R. Rosenzweig and L. W. Porter (Eds.), *Annual review of psychology* (Vol. 32). Palo Alto: Annual Reviews Inc.
- Miller, G. and Nicely, P. E. (1955). An analysis of perceptual confusions among some English consonants. *Journal of the Acoustical Society of America* 27, 338—352.
- Monahan, J. S. and Lockhead, G. R. (1977). Identification of integral stimuli. *Journal of Experimental Psychology: General* 106, 94—110.
- Nie, N. H., Hull, C. H., Jenkins, J. G., Steinbrenner, K. and Bent, D. H. (1975). *Statistical package for the social sciences* (2nd ed.) New York: McGraw-Hill.
- Noma, E. and Johnson, J. (1979). Constrained nonmetric multidimensional scaling (Tech. Rep. MMPP 1979—4). Ann Arbor, MI: University of Michigan, Michigan Mathematical Psychology Program
- Nygren, T. E. (1978). ADDIMOD: A program to test the axioms of the additive dif-

- ference model for multidimensional scaling. *Applied Psychological Measurement* 2, 338-360.
- Nygren, T. E. (1979). A theoretical framework for testing the additive difference model for dissimilarities data: Representing gambles as multidimensional stimuli. *Journal of Mathematical Psychology* 20, 53-77.
- Nygren, T. E. and Jones, L. E. (1977). Individual differences in perceptions and preferences for political candidates. *Journal of Experimental Social Psychology* 13, 182-197.
- Prediger, D. J. (1980). Mapping occupations and interests: A graphic aid for vocational guidance and research. Unpublished manuscript, American College Testing Service, Iowa City, IA.
- Pruzansky, S. (1975). How to use SINDSCAL: A computer program for individual differences in multidimensional scaling. Unpublished manuscript, Bell Laboratories, Murray Hill, NJ.
- Ramsay, J. O. (1978). MULTISCALE: Four programs for multidimensional scaling by the method of maximum likelihood. Chicago: International Education Services.
- Ramsay, J. O. (1980). Some small sample results for maximum likelihood estimation in multidimensional scaling. *Psychometrika*, 45, 139-144.
- Rest, J. R. (1979). Development in judging moral issues. Minneapolis, MN: University of Minnesota.
- Richardson, M. W. (1938). Multidimensional psychophysics. *Psychological Bulletin* 35, 659-660.
- Rosenberg, S. and Jones, R. (1972). A method of investigating and representing a person's implicit theory of personality: Theodore Dreiser's view of people. *Journal of Personality and Social Psychology* 22, 372-386.
- Rosenberg, S. and Kim, M. P. (1975). The method of sorting as a data-gathering procedure in multivariate research. *Multivariate Behavioral Research* 10, 489-502.
- Rosenberg, S., Nelson, C. and Vivekananthan, P. S. (1968). A multidimensional approach to the structure of personality impressions. *Journal of Personality and Social Psychology* 9, 283-294.
- Roskam, E. E. (1969). Data theory and algorithms for nonmetric scaling (Parts 1 and 2). Unpublished manuscript, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands.
- Ross, R. T. (1934). Optimum orders for presentation of pairs in paired comparisons. *Journal of Educational Psychology* 25, 375-382.
- Rothkopf, E. Z. (1957). A measure of stimulus similarity and errors in some paired-associate learning tasks. *Journal of Experimental Psychology* 53, 94-104.
- Rounds, J. B., Jr., Davison, M. L. and Dawis, R. V. (1979). The fit between Strong-Campbell Interest Inventory general occupational themes and Holland's hexagonal model. *Journal of Vocational Behavior* 15, 303-315.
- Rummelhart, D. E. and Abrahamson, A. A. (1973). A model for analogical reasoning. *Cognitive Psychology* 5, 1-28.
- Sarle, W. S. (1981). The ADCLUS procedure (Technical Report S-124). Cary, NC: SAS Institute.
- Sattath, S. and Tversky, A. (1977). Additive similarity trees. *Psychometrika*, 42, 319-345.
- Saunders, D. R. (1960). A computer program to find the best-fitting orthogonal factors for a given hypothesis. *Psychometrika* 25, 207-210.
- Schiffman, S. S., Reynolds, M. L. and Young, F. W. (1981). Introduction to multidimensional scaling. New York: Academic.
- Schlessinger, I. M. and Guttman, L. (1969). Smallest space analysis of intelligence and achievement tests. *Psychological Bulletin* 71, 95-100.
- Schönemann, P. H. (1972). An algebraic solution for a class of subjective metrics models. *Psychometrika* 37, 441-451.
- Schönemann, P. H. and Carroll, R. M. (1970). Fitting one matrix to another under choice of a central dilations and a rigid motion. *Psychometrika*, 35, 245-255.

- Shepard, R. N. (1962). The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function. *Psychometrika* 27, 125—140, 219—246.
- Shepard, R. N. (1972a). Introduction to volume 1. In: R. N. Shepard, A. K. Romney and S. B. Nerlove (Eds). *Multidimensional scaling: Theory and applications in the behavioral sciences* (Vol. 1). New York: Seminar Press.
- Shepard, R. N. (1972b). Psychological representation of speech sounds. In: E. E. David and P. B. Denes (Eds.), *Human communication: A unified view*. New York: McGraw-Hill.
- Shepard, R. N. (1974). Representation of structure in similarity data: Problems and prospects. *Psychometrika* 39, 373—422.
- Shepard, R. N. (1980). Multidimensional scaling, tree-fitting, and clustering. *Science* 210, 390—398.
- Shepard, R. N. and Arabie, P. (1979). Additive clustering: Representation of similarities as combinations of discrete overlapping properties. *Psychological Review* 86, 87—123.
- Shepard, R. N., Kilpatrick, D. W. and Cunningham, J. P. (1975). The internal representation of numbers. *Cognitive Psychology* 7, 82—138.
- Sherman, C. R. (1972). Nonmetric multidimensional scaling: A Monte Carlo study of the basic parameters. *Psychometrika* 37, 323—355.
- Shikhar, R. and Coates, C. (1978). A multidimensional scaling study of person perception in children. *Multivariate Behavioral Research* 13, 363—370.
- Smith, R. J. and Siegel, A. I. (1967). A multidimensional scaling analysis of the job of civil defense director. *Journal of Applied Psychology* 51, 476—480.
- Sneath, P. H. and Sokal, R. R. (1973). *Numerical taxonomy*. San Francisco: W. H. Freeman.
- Soli, S. D. and Arabie, P. (1979). Auditory versus phonetic accounts of observed confusions between consonant phonemes. *Journal of the Acoustical Society of America* 66, 46—52.
- Spence, I. (1972). A Monte Carlo evaluation of three nonmetric multidimensional scaling algorithms. *Psychometrika* 37, 461—486.
- Spence, I. (1974). On random ranking studies in nonmetric scaling. *Psychometrika* 39, 267—268.
- Spence, I. and Domoney, D. W. (1974). Single subject incomplete designs for nonmetric multidimensional scaling. *Psychometrika* 39, 469—490.
- Spence, I. and Young, F. W. (1978). Monte Carlo studies in nonmetric scaling. *Psychometrika* 43, 115—117.
- Srinivasan, V. and Shocker, A. D. (1973). Linear programming techniques for multidimensional analysis of preferences. *Psychometrika* 38, 337—369.
- Stevens, S. S. (1971). Issues in psychophysical measurement. *Psychological Review* 78, 426—450.
- Subkoviak, M. J. (1975). The use of multidimensional scaling in educational research. *Review of Educational Research* 45, 387—423.
- Swann, B. B. (1978). Affines, office, and factionalism in three rural Japanese settlements. Unpublished doctoral dissertation, Brandeis University.
- Takane, Y. (1981). Multidimensional successive-categories scaling: A maximum likelihood method. *Psychometrika* 46, 9—28.
- Takane, Y., Young, F. W. and De Leeuw, J. (1977). Nonmetric individual differences multidimensional scaling: An alternating least squares method with optimal scaling features. *Psychometrika* 42, 7—67.
- Thurstone, L. L. (1927). A law of comparative judgment. *Psychological Review* 34, 273—286.
- Thurstone, L. L. (1947). *Multiple-factor analysis*. Chicago: University of Chicago.
- Torgerson, W. S. (1952). Multidimensional scaling: I. Theory and method. *Psychometrika* 17, 401—419. Русский перевод: Торгерсон У. С. Многомерное шкалирование: Теория и метод // Статистическое измерение качественных характеристик. — М.: Статистика, 1972. — С. 95—118.
- Torgerson, W. S. (1958). *Theory and methods of scaling*. New York: Wiley.

- Tucker, L. R. (1960) Intra-individual and inter-individual multidimensionality. In: H. Gulliksen and S. Messick (Eds.). *Psychological scaling: Theory and applications* New York: Wiley.
- Tucker, L. R. (1967). *The objective definition of simple structure in linear factor analysis*. In D. N. Jackson and S. Messick (Eds.). *Problems in human assessment*. New York: McGraw-Hill.
- Tucker, L. R. (1972). Relations between multidimensional scaling and three-mode factor analysis. *Psychometrika* 37, 3—28.
- Tversky, A. (1977). Features of similarity. *Psychological Review* 84, 327—352.
- United States Employment Service Dictionary of Occupational Titles (4th ed.) (1977). Washington, DC: United States Department of Labor.
- Wainer, H. and Berg, W. (1972). The dimensions of De Maupassant: A multidimensional analysis of students' perception of literature. *American Educational Research Journal* 9, 485—491.
- Wiener-Ehrlich, W. K. (1978). Dimensional and metric structures in multidimensional stimuli. *Perception and Psychophysics* 24, 399—414.
- Wish, M., Deutsch, M. and Biener, L. (1970). Differences in conceptual structures of nations: An exploratory study. *Journal of Personality and Social Psychology* 16, 361—373.
- Wish, M., Deutsch, M. and Kaplan, S. J. (1976). Perceived dimensions of interpersonal relations. *Journal of Personality and Social Psychology* 33, 409—420.
- Wohlwill, J. (1973). *The study of behavioral development*. New York: Academic.
- Young, F. W. (1972). A model for polynomial conjoint analysis algorithms. In: R. N. Shepard, A. K. Romney and S. B. Nerlove (Eds), *Multidimensional scaling: Theory and applications in the behavioral sciences* (Vol. 1). New York: Seminar Press.
- Young, F. W., Hamer, R. M. and Lewyckj, R. (1980). Nonmetric multidimensional scaling under SAS. In *Proceedings of the fifth annual SAS users group international conference*. Cary, NC: SAS Institute Inc.
- Young, F. W. and Lewyckj, R. (1979). *ALSCAL 4 User's Guide*. (2nd ed.). Chapel Hill, NC: Data Analysis and Theory Associates.
- Young, F. W., Takane, Y. and Lewyckj, R. (1978). Three notes on ALSCAL. *Psychometrika*, 43, 433—435.
- Young, F. W. and Torgerson, W. S. (1967). TORSCA: A FORTRAN IV program for Shepard-Kruskal multidimensional scaling analysis. *Behavioral Science* 12, 498.
- Young, G. and Householder, A. S. (1938). Discussion of a set of points in terms of their mutual distances. *Psychometrika* 3, 19—22.
- Young, G. and Householder, A. S. (1941). A note on multidimensional psychophysics. *Psychometrika* 6, 331—333.
- Zinnes, J. L. and Griggs, R. A. (1974). Probabilistic, multidimensional unfolding analysis. *Psychometrika* 39, 327—350.
- Zinnes, J. L. and Wolff, R. P. (1977). Single- and multi-dimensional same-different judgments. *Journal of Mathematical Psychology* 16, 30—50.

● ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА*

- Coxon A. P. M. The user's guide to multidimensional scaling. — London: Heinemann Educational Books, 1982. — 271 p.
- Dunn — Rankin P. Scaling methods. — Erlbaum, 1983. — 429 p.
- Green P. E., Carmone F. J. Multidimensional scaling and Related Techniques in Marketing Analysis. — Boston: Allyn and Bacon, 1970. — 203 p.
- Green P. E., Rao V. R. Applied Multidimensional Scaling: a comparison of approaches and Algorithms. — New York: Holt, Rinehart and Winston, 1972. — 292 p.
- Hartmann W. Geometrische Modelle zur Analyse empirischer Daten. — Berlin: — Akademie-Verlag, 1979. — 256 S.
- Kamensky V. S., Ross J. Paired comparisons of complex tones by professional musicians: an experimental study using the pairwise nonmetric multidimensional unfolding method // Symposium on common aspects of processing of linguistic and musical data. Academy of Sciences of the Estonian S.S.R. Division of Social Sciences. — Tallin, 1982. — P. 40—42.
- Kruskal J. B. Multidimensional scaling and other methods for discovering structure // Statistical Methods for Digital Computers. — New York: Wiley — Interscience, 1977a. — Vol. 3. — P. 296—339. Русский перевод: Статистические методы для ЭВМ. — М.: Наука, 1986. — С. 301—347.
- Petrov W. M., Kamensky V. S. The perception of russian rhymes: an experimental study using the method of pairwise nonmetric multidimensional unfolding // Symposium: Computational linguistics and related topics. Academy of Sciences of the Estonian S. S. R. Division of social sciences. — Tallinn, 1980. — P. 87—90.
- Roskam E. E. Metric Analysis of ordinal data in psychology. — Nijmegen: University of Leiden Press, 1968. — 167 p.
- Young F. W., De Leeuw J., Takane Y. Multidimensional scaling. Theory and method. — Erlbaum, 1986.
- Young F. W., Hamer R. M. Theory and applications of multidimensional scaling. — New Jersey: Erlbaum association, 1984.
- Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В. Классификация многомерных наблюдений. — М.: Статистика, 1974. — 239 с.
- Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 471 с.
- Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. — М.: Финансы и статистика, 1985. — 487 с.

* Кроме книг, полностью или частично посвященных теории и приложениям многомерного шкалирования, в этот список включены работы по матричной алгебре, факторному анализу, кластерному анализу, которые могут заменить и дополнить рекомендуемые автором книги.

- Алгоритмы и программы восстановления зависимостей/Под ред. В. Н. Вапника.— М.: Наука, 1984.—815 с.
- Бабаева Ю. Д., Каменский В. С. Использование экспертных методов для оценки эффективности диалоговых систем // Вопросы кибернетики: Экспертные оценки. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1979. — Вып. 58.— С. 172—180.
- Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1974.—320 с.
- Беллман Р. Введение в теорию матриц: Пер. с англ.— М.: Наука, 1969. — 367 с.
- Болч Б., Хуань Дж. К. Многомерные статистические методы для экономики/Пер. с англ. Под ред. С. А. Айвазяна.— М.: Статистика, 1979.—317 с.
- Браверман Э. М., Мучник И. Б. Структурные методы обработки эмпирических данных. — М.: Наука, 1983.— 464 с.
- Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.—318 с.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
- Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.—271 с.
- Герганов Е. Н., Николова Ц. С., Терехина А. Ю., Фрумкина Р. М. Анализ восприятия звуковых стимулов индивидами-носителями разных фонетических систем // Вопросы кибернетики: Экспертные оценки. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1979.— Вып. 58.—С. 180—189.
- Гильберт А. Как работать с матрицами: Пер. с нем. — М.: Статистика, 1981.—157 с.
- Дорофеюк А. А. Алгоритмы автоматической классификации (обзор) // Автоматика и телемеханика.— 1971.— № 12.— С. 78—113.
- Дубров А. М. Обработка статистических данных методом главных компонент. — М.: Статистика, 1978.—135 с.
- Дэвид Г. Метод парных сравнений/Пер. с англ. Под ред. Ю. П. Адлера. — М.: Статистика, 1978.—144 с.
- Дюран Б., Одед П. Кластерный анализ: Пер. с англ. — М.: Статистика, 1977. — 128 с.
- Жуковская В. М., Мучник И. Б. Факторный анализ в социально-экономических исследованиях.— М.: Статистика, 1976.— 152 с.
- Иберла К. Факторный анализ: Пер. с нем.— М.: Статистика, 1980.—398 с.
- Измайлов Ч. А. Сферическая модель цветоразличения.— М.: МГУ, 1980. — 171 с.
- Измайлов Ч. А. Многомерное шкалирование ахроматической составляющей света //Нормативные и дискриптивные модели принятия решений: По материалам советско-американского семинара.— М.: Наука, 1981.— С. 98 — 110.
- Йереског К. Г., Клован Д. И., Реймент Р. А. Геологический факторный анализ.— Л.: Недра, 1980.—223 с.
- Каменский В. С. Немеетрическое многомерное шкалирование (обзор) // Прогнозирование развития библиотечного дела в СССР. — М.: ВГБИЛ, 1973.— Вып. 3.— С. 91—116.
- Каменский В. С. Некоторые проблемы обработки экспертных оценок // Системный анализ в ОАСУ.— М.: ЦЭМИ, 1975.—С. 134—147.
- Каменский В. С. Методы и модели немеетрического многомерного шкалирования (обзор) //Автоматика и телемеханика.— 1977 а, — № 8.—С. 118—156.

- Каменский В. С. Метод многомерного шкалирования при проектировании выборки и оценке ее надежности // Проектирование и организация выборочного социологического исследования. — М.: ИСИ, 1977б. — С. 59—71.
- Каменский В. С. Матричный подход к алгоритмам неметрического многомерного шкалирования // Автоматика и телемеханика. — 1979а. — № 1. — С. 122—131.
- Каменский В. С. Метод парного неметрического многомерного развертывания в социально-экономических задачах // Автоматика и телемеханика. — 1979б. — № 5. — С. 127—136.
- Каменский В. С. О реализации алгоритмов парного неметрического многомерного развертывания // Экспертные методы в системных исследованиях: Сборник трудов. — М.: ВНИИСИ, 1979 в. — Вып. 4. — С. 61—67.
- Каменский В. С. Проверка работы алгоритма парного неметрического многомерного развертывания на модельных примерах // Вопросы кибернетики: Экспертные оценки. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1979 г. — Вып. 58. — С. 150—156.
- Каменский В. С. Разработка и применение алгоритмов неметрического многомерного шкалирования для анализа ранговой информации: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1980. — 22 с.
- Каменский В. С. Об одном подходе к обработке больших массивов данных методом неметрического многомерного шкалирования // I Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации. — Москва — Алма-Ата; 1981. — С. 73.
- Каменский В. С. Методика интерпретации результатов неметрического шкалирования исследователем-прикладником // Всесоюзная научно-техническая конференция «Образный анализ многомерных данных». — М., 1984. — С. 16—17.
- Каменский В. С., Михеев А. В., Петров В. М. Психологи исследуют визуальное восприятие // Реклама, 1979. — № 1. — С. 18—23.
- Каменский В. С., Мучник И. Б., Новиков С. Г., Плотников С. Н., Стриганов В. М. Разработка многоступенчатой выборки для социологического исследования, проводившегося в масштабах Российской Федерации // Социология культуры. Принципы организации комплексного социологического исследования. — М.: НИИ культуры, 1980. — Вып. 97. — С. 33—82.
- Каменский В. С., Петров В. М. Об индикаторах оценки произведений искусства. (Экспериментальное исследование параметров, определяющих предпочтение) // Проблемы социальных показателей развития культуры — М.: НИИ культуры, 1982. — Вып. 108. — С. 94—106.
- Каменский В. С., Цыпин Е. Л., Шмерлинг Д. С., Штейн Д. И. Применение экспертных оценок для изучения тенденций структуры управления // Статистические методы анализа экспертных оценок. — М.: Наука, 1977. — С. 132—147.
- Классификация и кластер / Под ред. Дж. Вэн Райзина/Пер. с англ. Под ред. Ю. И. Журавлева. — М.: Мир, 1980. — 389 с.
- Клигер С. А., Косолапов М. С., Толстова Ю. Н. Шкалирование при сборе и анализе социологической информации. — М.: Наука, 1978. — 112 с.
- Косолапов М. С. Неметрическое многомерное шкалирование: постановка задач и алгоритмы их решения // Многомерный анализ социологических данных. — М.: ИСИ, 1981. — С. 74—117.

- Косолапов М. С. Классификация методов пространственного представления структуры исходных данных // Социологические исследования. — 1976. — № 2. — С. 98—109.
- Куперштох В. Л., Миркин Б. Г. Упорядочение взаимосвязанных объектов // Автоматика и телемеханика. — 1971. — № 6. — С. 77—82; № 7. — С. 91—97.
- Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Физматгиз, 1962. — 431 с.
- Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
- Лоули Д., Максвелл А. Факторный анализ как статистический метод. — М.: Мир, 1967. — 144 с.
- Манелля А. И., Терехина А. Ю. Статистический анализ типов динамики урожайности сельскохозяйственных культур // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. — М.: Наука, 1974. — С. 150—167.
- Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. — М.: Наука, 1972. — 232 с.
- Махмудов Т., Петров В. Вопросы методологии эстетического анализа искусства. — Ташкент. Фан, 1984. — 232 с.
- Методы анализа данных/Пер с франц. Под ред. С. А. Айвазяна и В. М. Бухштабера. — М.: Финансы и статистика, 1985. — 358 с.
- Михеев А. В., Каменский В. С., Петров В. М., Сатаров Г. А. Об использовании неметрического многомерного шкалирования при исследовании потребности в объектах культуры // Модели и методы исследования социально-экономических процессов. — М.: ЦЭМИ, 1975. — С. 205—224.
- Мозоров И. Д. Матричные расчеты в статистике. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 216 с.
- Окунь Я. Факторный анализ: Пер. с пол. — М.: Статистика, 1974. — 200 с.
- Панкова Л. А., Терехина А. Ю., Шнейдерман М. В. Классификация научных тем и анализ тематической структуры НИИ на основе экспертных оценок. — М.: Наука, 1977. — С. 281—289.
- Перекрест В. Т. Об одной модели многомерного инвариантного шкалирования // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 2. — С. 173—181.
- Перекрест В. Т. Нелинейный типологический анализ социально-экономической информации. — Л.: Наука, 1983. — 175 с.
- Перекрест В. Т. Функциональный подход в метрическом многомерном шкалировании // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — М.: Наука, 1985. — С. 113—132.
- Перекрест В. Т., Хмельницкая А. Б. Проекционные модели одномерного инвариантного шкалирования // Математические методы в социологическом исследовании. — М.: Наука, 1981. — С. 133—146.
- Песаран М., Слейтер Л. Динамическая регрессия: теория и алгоритмы: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1984. — 310 с.
- Петров В. М., Грибков В. С., Каменский В. С. Проверить гармонию ... экспериментом // Число и мысль. — М.: Знание, 1980. — Вып. 3. — С. 145—168.
- Петров В. М., Каменский В. С., Шепелев С. Н. «Прозрачность» стиля прозы: опыт экспериментального исследования восприятия // Проблемы структурной лингвистики 1976. — М.: Наука, 1978. — С. 297—317.
- Петров В. М., Каменский В. С. О количественной оценке значимости эстетических свойств пространственно-предметной среды // Психология и экспериментальная визуальная эстетика в свете решений XXVI съезда КПСС. — Таллин, 1981. — С. 116—119.

- Попечителей Е. П., Романов С. В. Анализ числовых таблиц в биотехнических системах обработки экспериментальных данных. — Л.: Наука, 1985. — 148 с.
- Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 264 с.
- Ребрин О. М., Каменский В. С. Экспертная оценка технико-экономических показателей для типологии предприятий обувной промышленности / Известия высших учебных заведений: Технология легкой промышленности. — 1978. — № 1. — С. 12—16.
- Решке К. Использование методов многомерного шкалирования изучения индивидуальных различий в оценке концентрации личности // Анализ нечисловых данных в системных исследованиях: Сборник трудов. — М.: ВНИИСИ, 1982. — Вып. 10. — С. 70—76.
- Сатаров Г. А. Парные сравнения в модели объединенного пространства / Вопросы кибернетики: Экспертные оценки. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1979. — Вып. 58. — С. 143—150.
- Сатаров Г. А. Сравнение двух алгоритмов шкалирования дихотомических данных // Математические методы в социологическом исследовании. — М.: Наука, 1981. — С. 90—98.
- Сатаров Г. А. Многомерное шкалирование: новые идеи и пути использования // Статистические методы в общественных науках. — М.: ИНИОН. 1982. — С. 122—159.
- Сатаров Г. А. Многомерное шкалирование скрытых факторов, влияющих на решение контрольных заданий // Проблемы педагогических измерений. — М.: МГПИ им. В. И. Ленина, 1984. — С. 43—68.
- Сатаров Г. А. Многомерное шкалирование при анализе дихотомических данных о социально-экономических системах: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук — М.: ВНИИСИ, 1985а. — 19 с.
- Сатаров Г. А. Многомерное шкалирование и другие методы при комплексном анализе данных // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — М.: Наука, 1985б. — С. 132—140.
- Сатаров Г. А., Каменский В. С. Общий подход к анализу экспертных оценок методами неметрического шкалирования // Статистические методы анализа экспертных оценок. — М.: Наука, 1977. — С. 251—266.
- Сатаров Г. А., Станкевич С. Б. Применение неметрического многомерного шкалирования при изучении расстановки и соотношения сил в конгрессе США // Анализ нечисловых данных в системных исследованиях: Сборник трудов. — М.: ВНИИСИ, 1982. — Вып. 10. — С. 76—83.
- Сатаров Г. А., Станкевич С. Б. Голосование в конгрессе США: опыт многомерного анализа // Социологические исследования. — 1983. — № 1. — С. 156—166.
- Сборник научных программ на Фортране: Пер. с англ. — М.: Статистика, 1974. — Вып. 1: Статистика. — 316 с. — Вып. 2: Матричная алгебра и линейная алгебра. — 223 с.
- Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике: Пер. с англ. — М.: Статистика, 1974. — 374 с.
- Соколов Е. Н., Измайлов Ч. А. Цветовое зрение. — М.: МГУ, 1984. — 175 с.
- Стренг Г. Линейная алгебра и ее применение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 454 с.
- Терехина А. Ю. Методы многомерного шкалирования и визуализации данных (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 7. — С. 80—94.

- Терехина А. Ю. О двух задачах индивидуального многомерного шкалирования // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 4. — С. 135—142.
- Терехина А. Ю. Анализ структуры эмпирических данных методами многомерного шкалирования: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. — М.: ИПУ, 1975. — 24 с.
- Терехина А. Ю. Анализ экспертных суждений методами многомерного шкалирования // Экспертные оценки и восприятие искусства. — М.: НИИ культуры, труды 48, 1977 а, — С. 119—128.
- Терехина А. Ю. Метрическое многомерное шкалирование. Препринт. — М.: ИПУ, 1977 б. — 75 с.
- Терехина А. Ю. Неметрическое многомерное шкалирование. Препринт. — М.: ИПУ, 1977 в. — 73 с.
- Терехина А. Ю. Построение матриц различий и использование их для выявления факторов, влияющих на оценки экспертов // Измерение и прогноз в культуре. — М.: НИИ культуры, 1978 а. — С. 131—138.
- Терехина А. Ю. Многомерные модели анализа предпочтений // Многокритериальный выбор при решении слабоструктурированных проблем: Сборник трудов. — М.: ВНИИСИ, 1978б — Вып. 4. — С. 30—38.
- Терехина А. Ю. Многомерный анализ субъективных данных о сходствах или различиях. Препринт. — М.: ВНИИСИ, 1978 в. — 68 с.
- Терехина А. Ю. Исследование основных параметров модели неметрического шкалирования методом Монте-Карло // Экспертные методы в системных исследованиях: Сборник трудов. — М.: ВНИИСИ, 1979в. — Вып. 4. — С. 67—78.
- Терехина А. Ю. О свойствах некоторых моделей субъективного восприятия // Вопросы кибернетики: Экспертные оценки. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1979б. — Вып. 58. — С. 133—142.
- Терехина А. Ю. Методологические аспекты использования многомерного шкалирования в системных исследованиях // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1981. — М.: Наука, 1981. — С. 87—105.
- Терехина А. Ю. Методы многомерного шкалирования в системных исследованиях. Препринт. — М.: ВНИИСИ, 1982а. — 83 с.
- Терехина А. Ю. Сравнительный анализ метрических и неметрических методов многомерного шкалирования // Анализ нечисловых данных в системных исследованиях: Сборник трудов. — М.: ВНИИСИ, 1982б. — Вып. 10. — С. 55—62.
- Терехина А. Ю. Многомерное шкалирование в психологии // Психологический журнал. — 1983. — Т. 4. — № 1. — С. 77—88.
- Терехина А. Ю. Задачи монотонного и интервального отображения. Препринт. — М.: ВНИИСИ, 1984. — 27 с.
- Терехина А. Ю. Многомерное шкалирование в обучении // Психолого-педагогические и психофизиологические проблемы компьютерного обучения. — М.: изд-во АПН СССР, 1985. — С. 106—116.
- Терехина А. Ю. Анализ данных методами многомерного шкалирования. — М.: Наука, 1986. — 168 с.
- Типология и классификация в социологических исследованиях. — М.: Наука, 1982. — 296 с.
- Тюрин Ю. Н., Литвак Б. Г., Орлов А. И., Сатаров Г. А., Шмерлинг Д. С. Анализ нечисловой информации. Препринт. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. — 80 с.
- Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 277 с.

- Харман Г. Современный факторный анализ/Пер. с англ. Под ред. Э. М. Бравермана. — М.: Статистика, 1972.— 486 с.
- Хартманн В. Дистанционные модели анализа метрических и порядковых данных // Анализ данных в системных исследованиях. Сборник трудов.— М.: ВНИИСИ, 1982.— Вып. 10.— С. 62—70.
- Хмельницкая А. Б. О линейном методе приближенного решения задачи одномерного инвариантного шкалирования // Автоматика и телемеханика, 1980 а. — № 10. — С. 136—145.
- Хмельницкая А. Б. Об оптимизационных моделях многомерного инвариантного шкалирования // Математическое моделирование и применение вычислительной техники в социологических исследованиях.— М.: ИСИ, 1980б. — С. 55—68.
- Хмельницкая А. Б. Проекционные модели инвариантного шкалирования // Автоматика и телемеханика.— 1983. — № 6. — С. 125—130; № 7. — С. 105—115.
- Шепард Р. Н. Многомерное шкалирование и неметрические представления // Нормативные и дескриптивные модели принятия решений: По материалам советско-американского семинара. — М.: Наука, 1981.— С. 84—98.
- Шрайбер Е. Л. Многомерное шкалирование с учетом индивидуальных различий // Математические методы и модели в социологии.— М.: ИСИ, 1977.— С. 102—112.
- Шрайбер Е. Л. Латентные переменные вербальных моделей социального поведения // Математическое моделирование и применение вычислительной техники в социологических исследованиях. — М.: ИСИ, 1980.— С. 154—160.
- Шрайбер Е. Л. Приемы сбора данных и интерпретации числовых результатов в процедурах многомерного шкалирования // Статистические методы в общественных науках. — М.: ИНИОН, 1982. — С. 96—121.
- Шрайбер Е. Л. Анализ различия экспертных оценок методом многомерного шкалирования в социологическом исследовании: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд фил. наук. — М.: ИСИ, 1984 — 15 с.

● СПИСОК СИМВОЛОВ

- $\widehat{b}_{kk'}$ — вектор k оценок регрессионных весов \widehat{b}_{ks} .
- $b_{kk'}$ — вес множественной регрессии для входной переменной k и выходной переменной k' .
- $b_{kk's}$ — регрессионный вес входной переменной, представляющей взаимодействие переменных k и k' , в уравнении, соответствующем выходной переменной s .
- $\widehat{b}_{kk'}$ — оценка веса множественной регрессии для входной переменной k и выходной переменной k' .
- $\widehat{b}_{kk's}$ — оценка регрессионного веса входной переменной, представляющей взаимодействие переменных k и k' в уравнении, соответствующем выходной переменной s .
- b_{ks} — регрессионный вес входной переменной k в уравнении выходной переменной s .
- \widehat{b}_{ks} — оценка регрессионного веса входной переменной k в уравнении выходной переменной s .
- c — индекс для обозначения итерации; аддитивная или мультипликативная константа.
- c_s — аддитивная константа (постоянный отрезок) субъекта s .
- c_s^* — аддитивная константа субъекта s .
- \widehat{D}_s — матрица оценок расстояний \widehat{d}_{ijs} в стимульном пространстве субъекта s .
- Δ — матрица данных о близости с элементами δ_{ij} .
- Δ_s — матрица данных о близости для субъекта s .
- Δ^* — матрица скалярных произведений с элементами δ_{ij}^* .
- Δ_s^* — матрица скалярных произведений для субъекта s с элементами δ_{ijs}^* .
- $\widehat{\Delta}_s^*$ — матрица оценок скалярных произведений для субъекта s с элементами $\widehat{\delta}_{ijs}^*$.
- $d(a, b)$ — расстояние между точками a и b .
- $d(a, c)$ — расстояние между точками a и c .
- $d(b, c)$ — расстояние между точками b и c .
- d_{ij} — расстояние между точками i и j .
- d_{ijs} — расстояние между точками i и j в стимульном пространстве субъекта s .
- d_{is} — расстояние между точками i и s .
- \widehat{d}_{ij} — оценка расстояния между точками i и j .
- \widehat{d}_{ijs} — оценка расстояния между точками i и j в стимульном пространстве субъекта s .
- \widehat{d}_{ij}^q — оценка расстояния между точками i и j , рассчитанная по их координатам в стартовой конфигурации.
- \widehat{d}_{ij}^c — оценка расстояния между точками i и j , рассчитанная на итерации c .
- \widehat{d}_{ij}^{c+1} — оценка расстояния между точками i и j , рассчитанная на итерации $(c + 1)$.
- δ_{ij} — мера близости между стимулами i и j .
- δ_{ijs} — мера близости пары стимулов (i, j) для субъекта s .
- δ_{is} — предпочтение стимула i субъектом s .
- δ_{js} — предпочтение стимула j субъектом s .
- δ_{ij}^* — скалярное произведение для пары стимулов (i, j) . См. формулу (4.3).

- δ_{ijs}^* — скалярное произведение для пары стимулов (i, j) и субъекта s . См. формулу (6 7).
- $\widehat{\delta}_{ij}$ — отклонение (ранговый образ) для пары стимулов (i, j) . См. формулу (5 11)
- $\widehat{\delta}_{ijs}$ — отклонение (ранговый образ) для пары стимулов (i, j) и субъекта s .
- $\widehat{\delta}_{is}$ — отклонение (ранговый образ), соответствующий δ_{is} , предпочтению стимула i субъектом s . См. формулу (7.3).
- $\widehat{\delta}_{js}$ — отклонение (ранговый образ), соответствующий δ_{js} , предпочтению стимула j субъектом s . См. формулу (7 3)
- $\widehat{\delta}_{ijs}^*$ — оценка скалярного произведения δ_{ijs}^* . См формулу (6.13).
- $\widehat{\delta}_{ij}^{c+1}$ — отклонение для стимулов i и j , рассчитанное на $(c + 1)$ -й итерации.
- F — статистика, соответствующая F -распределению; функция потерь в методе наименьших квадратов.
- f — монотонная функция.
- f_s — монотонная функция для субъекта s .
- I — единичная матрица.
- I — число стимулов
- i — индекс, обозначающий стимул.
- i' — индекс, обозначающий стимул.
- J — число стимулов.
- j^\perp — индекс, обозначающий стимул.
- j' — индекс, обозначающий стимул.
- K — размерность пространства; число измерений в профиле измерений.
- K^* — априорная оценка размерности пространства стимулов.
- k — коэффициент отчуждения, определенный в формуле (5 20),
- k — индекс, обозначающий координатную ось или измерение в профиле измерений
- k' — индекс, обозначающий координатную ось.
- λ_k — собственное значение для координатной оси k :
 $\lambda_k = \sum_i x_{ik}^2$.
- M — число оценок для каждой пары стимулов; размерность субъективного пространства в трехмодальном решении.
- m — индекс, обозначающий координатную ось субъективного пространства в трехмодальном многомерном шкалировании; индекс, обозначающий блок отклонений в Краскаловской монотонной регрессии.
- P — матрица вероятностей с элементами p_{ij} .
- p — верхний индекс, обозначающий метрику Минковского в расстоянии Минковского
- p_{ij} — вероятность, определенная для пары стимулов (i, j) .
- R_s — матрица параметров взаимодействия для субъекта s , $r_{kk's}$; $R_s = T_s T_s'$.
- \widehat{R}_s — матрица оценок параметров взаимодействия для субъекта s , $\widehat{r}_{kk's}$.
- R_E — множественная корреляция, полученная путем подгонки простой евклидовой модели для предпочтений.
- R_G — множественная корреляция, полученная путем подгонки обобщенной евклидовой модели для предпочтений
- $R_{k'}$ — множественная корреляция, полученная регрессией входных переменных на выходную переменную k' .
- R_W — множественная корреляция, полученная путем подгонки взвешенной евклидовой модели для предпочтений.
- R_V — множественная корреляция, полученная путем подгонки векторной модели для предпочтений.
- r — коэффициент корреляции между оцененными и фактическими скаляр-

ными произведениями, используемый как мера соответствия в некоторых алгоритмах многомерного шкалирования. См. формулу (6.15).

r_{ij} — корреляция между значениями i -го и j -го измерений.

$r_{kk's}$ — параметр, характеризующий величину и направление взаимодействия между координатными осями k и k' в оценках субъекта s .

r_s — корреляция между оцененными и фактическими скалярными произведениями для субъекта s . См. формулу (6.18).

$r(Y, \widehat{X})$ — коэффициент согласованности для целевой матрицы Y и матрицы координат стимулов \widehat{X} .

$\widehat{r}_{kk's}$ — оценка параметра, характеризующего величину и направление воздействия между координатами k и k' в оценках субъекта s .

S_1 — стресс, формула 1, показывающий степень соответствия модели данным. См. формулу (5.13).

S_2 — стресс, формула 2, показывающий степень соответствия модели данным. См. формулу (5.14).

SS_1 — S-стресс, формула 1, показывающий степень соответствия модели данным. См. формулы (5.16), (6.5), (6.6).

SS_2 — S-стресс, формула 2, показывающий степень соответствия модели данным. См. формулу (5.17).

S — число субъектов.

s — индекс, обозначающий субъекта.

T — матрица преобразований с элементами $t_{kk'}$.

T_s — матрица преобразования для субъекта s с элементами $t_{kk's}$.

\widehat{T} — оцененная матрица преобразований с элементами $\widehat{t}_{kk'}$.

\widehat{T}_s — оцененная матрица преобразования для субъекта s с элементами $\widehat{t}_{kk's}$.

$t_{kk'}$ — косинус угла между координатной осью k и повернутой координатной осью k' .

$t_{kk's}$ — косинус угла между координатными осями k и k' в стимульном пространстве субъекта s .

$\widehat{t}_{kk'}$ — оценка косинуса угла между координатной осью k и повернутой координатной осью k' .

$\widehat{t}_{kk's}$ — оценка косинуса угла между координатами k и k' в стимульном пространстве субъекта s .

μ — коэффициент монотонности, определенный в формуле (5.19).

W — матрица субъективных весов с элементами w_{ks} .

W_s — диагональная матрица весов для субъекта s , в которой k -й диагональный элемент равен w_{ks} .

W_s^2 — диагональная матрица весов для субъекта s , в которой k -й диагональный элемент равен w_{ks}^2 .

\widehat{W} — матрица оценок субъективных весов с элементами \widehat{w}_{ks} .

\widehat{W}_s — диагональная матрица оценок весов для субъекта s , в которой k -й диагональный элемент равен \widehat{w}_{ks} .

\widehat{W}_s^2 — матрица квадратов оценок субъективных весов с элементами \widehat{w}_{ks}^2 .

w_{ks} — вес координатной оси k для субъекта s ; k -я координата субъекта s в пространстве субъективных весов.

w_s — субъективный вес координатной оси для субъекта s , общий для всех K координатных осей.

w_{ks}^* — относительный вес координаты k для субъекта s . См. формулу (6.19).

\widehat{w}_{ks} — оценка субъективного веса w_{ks} .

\widehat{w}_s — оценка субъективного веса w_s , общего для всех K координатных осей.

X — матрица координат стимулов с элементами x_{ik} , x_{jk} ;

- матрица координат стимулов и координат идеальных точек с элементами x_{ik} , x_{jk} и x_{sk} .
- X_s — матрица координат стимулов для субъекта s с элементами x_{iks} , x_{jks} .
- X^* — повернутая координатная матрица X : $X^* = XT$.
- \widehat{X} — матрица оценок координат стимулов с элементами \widehat{x}_{ik} , \widehat{x}_{jk} ; матрица оценок координат стимулов и координат идеальных точек с элементами \widehat{x}_{ik} , \widehat{x}_{jk} , \widehat{x}_{sk} .
- \widehat{X}^* — повернутая матрица оценок координат \widehat{X} : $\widehat{X}^* = \widehat{X}T$ с элементами \widehat{x}^*_{ik} .
- \widehat{X}^0 — матрица оценок координат, используемая как стартовая конфигурация в итерационном алгоритме многомерного шкалирования.
- \widehat{x}_s — вектор оценок координат K идеальных точек \widehat{x}_{sk} .
- x_i — координата стимула i в одномерном пространстве.
- x_{ik} — k -я координата стимула i .
- x_{iks} — k -я координата стимула i и в стимульном пространстве субъекта s .
- x_j — координата стимула j в одномерном пространстве.
- x_{jk} — k -я координата стимула j .
- x_{jks} — k -я координата стимула j в стимульном пространстве субъекта s .
- x_s — координата идеальной точки субъекта s в одномерном пространстве.
- x_{sk} — k -я координата идеальной точки субъекта s .
- x_{sks} — k -я координата идеальной точки субъекта s в стимульном пространстве субъекта s .
- \widehat{x}_{ik} — оценка координаты стимула x_{ik} .
- \widehat{x}_{jk} — оценка координаты стимула x_{jk} .
- \widehat{x}_{sk} — оценка k -й координаты идеальной точки субъекта s , x_{sk} .
- \widehat{x}^i_{ik} — оценка значения стимула i на повернутой оси k .
- \widehat{x}^0_{ik} — первоначальная оценка координаты стимула x_{ik} , используемая итерационным алгоритмом многомерного шкалирования в качестве координаты точки стартовой конфигурации.
- \widehat{x}^0_{jk} — первоначальная оценка координаты стимула x_{jk} , используемая итерационным алгоритмом многомерного шкалирования в качестве координаты точки стартовой конфигурации.
- \widehat{x}^c_{ik} — оценка k -й координаты стимула i , рассчитанная на итерации c .
- \widehat{x}^c_{jk} — оценка k -й координаты стимула j , рассчитанная на итерации c .
- \widehat{x}^{c+1}_{ik} — оценка k -й координаты стимула i , рассчитанная на итерации $c + 1$.
- Y — матрица, содержащая гипотетические координаты стимулов y_{ik} . Y иногда называется целевой матрицей.
- \widehat{Y} — матрица, содержащая оценки гипотетических координат стимулов \widehat{y}_{ik} .
- y_{ik} — гипотетическая координата стимула i по k -й координатной оси.
- \widehat{y}_{ik} — оценка гипотетической координаты стимула i по k -й координатной оси.
- Z — матрица стандартизованных профильных оценок с элементами z_{ik} ; матрица субъективных координат z_{sm} в трехмодальном анализе.
- \widehat{Z} — матрица оценок субъективных координат \widehat{z}_{sm} в трехмодальном анализе.
- \widehat{Z}^* — повернутые координаты субъективного пространства в трехмодальном многомерном шкалировании.
- z_{ik} — стандартизованная оценка объекта i по k -му измерению.
- z_{sm} — m -я координата субъекта s в субъективном пространстве трехмодального многомерного шкалирования.

Каменский В. С.

ПРОГРАММА НЕМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОМЕРНОГО ШКАЛИРОВАНИЯ PARSUN

Назначение. Решение задач неметрического многомерного шкалирования в модели евклидова расстояния. Можно решать задачи двух типов:

1) задачи неметрического многомерного шкалирования матрицы близости (шкалирование в узком смысле), см. гл. 5 книги М. Дэйвисона (решается, когда вводимый параметр $KSUBJ$ равен нулю);

2) задачи неметрического многомерного шкалирования матрицы предпочтений (упорядочений), т. е. задачи неметрического многомерного развертывания, см. гл. 7 книги М. Дэйвисона (решается, когда вводимый параметр $KSUBJ$ больше нуля).

Ограничения. Размерность пространства ($MDIM$) не более 10. Число объектов ($NSTIM$) в задаче шкалирования не более 100. В задаче развертывания: число объектов ($NSTIM$) не более 200, число экспертов ($KSUBJ$) не более 200. $NSTIM * KSUBJ \leq 5000$, $NSTIM * MDIM \leq 1000$, $KSUBJ * MDIM \leq 1000$. Все ограничения легко снимаются при изменении размерности массивов в головной программе.

Краткая характеристика программы. Программа написана на Фортране. Состоит из головной программы и 23 подпрограмм*. Назначение подпрограмм описано в комментариях. Требуются только стандартные подпрограммы (содержащиеся в ОС ЕС в библиотеке $SYS1.FORTLIB$). В операторах ввода и вывода учтены некоторые особенности ЕС ЭВМ и операционной системы ОС ЕС. Для других ЭВМ нужно внести в эти операторы незначительные изменения.

Краткая характеристика алгоритмов. Для задачи шкалирования применяется метод парного неметрического многомерного шкалирова-

* Подпрограмма UNITE, написанная А. Б. Каменской на Ассемблере, предназначена для динамического вызова подпрограммы на Фортране. Такую подпрограмму на Фортране, имя которой вводится во время работы основной программы, пишут и применяют только при необходимости машинной интерпретации полученной конфигурации. Если подобная интерпретация не нужна, то подпрограмма UNITE не используется. В этом случае оператор $CALL UNITE$ можно исключить из головной программы PARSUN.

ния, т. е. минимизируется коэффициент θ (5.20a) [Johnson, 1973]. Как отмечено в указанной работе, этот алгоритм требует несколько больше времени, чем описанные в гл. 5 книги М. Дэйвисона трансформационные алгоритмы, но принцип построения парных коэффициентов проще.

Для решения задачи шкалирования матрицы упорядочений (предпочтений) применяется метод парного неметрического многомерного развертывания, т. е. минимизируется коэффициент θ (7.3a) [Каменский, 1975, 1977a]. Время работы алгоритма примерно в два раза меньше, чем у описанных в гл. 7 книги М. Дэйвисона трансформационных алгоритмов.

Программа ищет несколько локальных минимумов коэффициента и печатает конфигурации для каждого из них.

Классификация данных. М. Дэйвисон рассматривает многомерное шкалирование для данных двух типов, которые соответствуют решаемым с помощью программы задачам. Первый тип — данные о близости (см. гл. 4, 5, 6). Обычно данные о близости — это одна (как в гл. 4 и 5) или несколько (как в гл. 6) матриц близости объектов. Способы получения таких матриц описаны в гл. 3. В общем же случае эти данные могут быть получены путем парного сравнения пар объектов в ответ на вопрос типа: «В какой из этих двух пар объекты ближе друг к другу?». Ответы на такие вопросы представляют собой бинарное отношение на множестве пар объектов, т. е. на квадрате множества объектов. Коэффициент θ (5.20a) в отличие от трансформационных коэффициентов может применяться для обработки производных бинарных отношений на квадрате множества объектов. Если бинарное отношение на квадрате множества объектов транзитивно, то оно записывается в виде матрицы близости. Если же данные о близости числовые, как в гл. 4 и 6 книги М. Дэйвисона, то бинарное отношение на квадрате множества объектов перейдет в числовую матрицу близости.

Ко второму типу относятся данные о предпочтении, которые представляют собой одно или несколько (см. гл. 7) упорядочений объектов. Упорядочение объектов можно получить в ответ на вопрос типа «Упорядочьте объекты по предпочтению». В общем случае такие данные получают путем парных сравнений объектов, т. е. в ответ на вопрос типа «Какой из двух объектов предпочтительнее?». Коэффициент θ (7.3a) может применяться для обработки произвольных бинарных отношений на множестве объектов. Трансформационные коэффициенты в этом случае непригодны. Если бинарное отношение на множестве объектов транзитивно, то оно записывается в виде упорядочения. Если же данные о предпочтении числовые, как во второй части гл. 7 книги М. Дэйвисона, то бинарное отношение перейдет в числовые оценки объектов.

Различия между методами для данных на квадрате множества объектов и на самом множестве объектов существуют не только в многомерном шкалировании. Так, в кластер-анализе различают алгоритмы классификации по матрице связи (близости) и по матрице объект — признак. Однако для числовых данных (в многомерном шкалировании

— для метрического многомерного шкалирования) такое различие не всегда существенно, поскольку по матрице объект — признак можно найти евклидово расстояние между объектами или какую-либо другую меру близости объектов. Однако для ранговых данных оно существенно. Поэтому различие между бинарным отношением на множестве объектов и бинарным отношением на квадрате множества объектов целесообразно положить в основу классификации методов шкалирования.

Входная информация. В общем случае для программы PARSUN требуется до 5 входных наборов данных с именами FT01F001 — FT05F001. Набор FT01F001 содержит обрабатываемые данные. Набор FT05F001 описывает процесс счета. Эти наборы данных являются обязательными. Остальные могут понадобиться в зависимости от режима работы программы.

Входная информация подробно описана в распечатке примеров. Форма описания такая. Сначала идет пример значения вводимой переменной, а затем, после пробела, — комментарий, включающий, как правило, имя этой переменной в программе, формат ввода и, если необходимо, ограничения на величину переменной. В отдельных случаях описание переменной расширено в комментариях, содержащихся в тексте программы.

Объектам (а в задаче типа 2 и экспертам) могут (в зависимости от вводимой переменной INDNAM) быть присвоены четырехсимвольные имена, сохраняющиеся в выходной информации. Именами могут служить также порядковые номера.

Выходная информация. Выходная информация описана в комментариях, содержащихся в тексте подпрограммы печати конфигурации PRICON, головной программы, подпрограммы печати машинного чертежа PICTUR и других подпрограмм, которые могут в ряде ситуаций выдать на печать сообщение. При печати конфигурации в виде чертежа (картинки) ее размер зависит от двух вводимых переменных: NCOLMN и NLINE. По горизонтали чертеж занимает $NCOLMN * 2$ символов, а по вертикали — NLINE строк. Значения этих параметров подбираются с учетом особенностей конкретного АЦПУ таким образом, чтобы $NCOLMN * 2$ символов по горизонтали занимали на листе АЦПУ примерно столько же места в строке, сколько занимают NLINE строк по вертикали. (Для многих АЦПУ $NCOLMN = 60$, $NLINE = 72$). При этом получается чертеж, у которого масштабы по разным координатным осям очень близки, и на практике перерисовки не требуется. Отметим, что чертежи, которые печатает программа KYST, в ряде случаев должны перерисовываться [см. Kruskal, 1977 в списке дополнительной литературы].

Тестами для программы могут служить примеры из гл. 5 книги М. Дэйвисона (см. табл. 5.1, 5.8, 5.9) и гл. 7 (см. табл. 7.1, 7.10). Результаты решения этих примеров с помощью программы PARSUN описаны в примечаниях переводчика.

```

C   PARSUN PROGRAM—ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА
    DIMENSION STIM(1000), GRSTIM(1000), UGRST(1000), VGRST(1000),
    * CONST(1000), STIMIN(1000)
    DIMENSION NAMSTI(400)
    DIMENSION SUBJ(1000), GRSUBJ(1000), CONSUB(1000), SUBMIN(1000)
    DIMENSION NAMSUB(400), TETASB(400), TESMIN(400), IRDIS(400)
    DIMENSION CONFJN(2000), DATA(5000), DIST(5000), IPICT(5000)
    DIMENSION OTETA(500)
    DIMENSION KEXCL(400), IFIX(400), NAMES(400)
    DIMENSION STIMMN(10), SUBJMN(10), CONFMN(10), UGRSUB(10), VGRSUB(10)
    DIMENSION FORDAT(13), TITLE(20), NAMPRI(2)
    EQUIVALENCE (IPICT(1), DIST(1), NAMES(1)), (IRDIS(1), CONFJN(1))
    READ (1, 1) KSUBJ
    READ (1, 1) NSTIM
  1  FORMAT (20I4)
    NPOINT=NSTIM+KSUBJ
    MDIST=NSTIM*(NSTIM-1)/2
    READ 8, MDIM
    READ (1, 10) FORDAT
    IF (KSUBJ.EQ.0) READ (1, 9) IPRTYP
    READ (1, 3) DATMIS
  3  FORMAT (F4, 0)
    READ 8, MAXST, MAXVM
    READ 5, TEMIN
  5  FORMAT (F10, 8)
    READ 8, NCOLMN, NLINE
  8  FORMAT (14)
    READ 8, KAPTIE, IZGRAD, ICTYPE
    READ 8, INRAND
  9  FORMAT (11)
    READ 9, KVMТYP, IPRINT, LASTPR, IEXCL, INOFIX, MIFWAY, KPCT
    READ (1, 10) TITLE
  10 FORMAT (20A4)
    READ (1, 9) INDNAM
    READ 11, INTCAL, NAMPRI
  11 FORMAT (11, 2A4)
    IF (KSUBJ.EQ.0) PRINT 17
  17 FORMAT (' PARSUN PROGRAM:PAIRWISE NONMETRIC MULTIDIMENSIONAL '
    * ' SCALING, JOHNSON' S COEFFICIENT')
C   ПРИ KSUBJ=0 ПЕЧАТАЕТСЯ ЗАГОЛОВОК ЗАДАЧИ ШКАЛИРОВАНИЯ
    IF (KSUBJ.GE.1) PRINT 18, KSUBJ
  18 FORMAT (' PARSUN PROGRAM:PAIRWISE NONMETRIC MULTIDIMENSIONAL '
    * ' UNFOLDING, KAMENSKY' S COEFFICIENT' / ' NUMBER OF SUBJECTS-', 14)
C   ПРИ KSUBJ>0 ПЕЧАТАЕТСЯ ЗАГОЛОВОК ЗАДАЧИ РАЗВЕРТЫВАНИЯ И ЧИСЛО ЭКСПЕРТОВ KSUBJ
    PRINT 19, NSTIM, MDIM, KAPTIE, MAXST, MAXVM, TEMIN
  19 FORMAT (' NUMBER OF STIMULI-', 14, ' DIMENSION-', 13,
    * ' APPROACH TO TIES-', 12/
    * ' MAXIMAL NUMBER OF ITERATIONS FOR A STARTING CONFIGURATION-',
    * ' 14, ' MAXIMAL NUMBER OF VIOLENT MOTIONS-', 13/
    * ' MINIMAL TETA FOR TERMINATING-', F12.9)
C   ПЕЧАТАЕТСЯ ВВЕДЕННАЯ ИНФОРМАЦИЯ: ЧИСЛО ОБЪЕКТОВ, РАЗМЕРНОСТЬ, СПОСОБ ОБРАБОТКИ
C   СВЯЗЕЙ, МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ НА 1 ЛОКАЛЬНЫЙ МИНИМУМ, МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО
C   ЛОКАЛЬНЫХ МИНИМУМОВ И МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ТЕТА ДЛЯ ОСТАНОВКИ СЧЕТА
    VMIN=0.000001
    COMNOR=NPOINT
    STOPML=0.005
    VIOLST=0.7
    NSTCHT=5
    CNRMIN=VMIN
    GNRMIN=VMIN
    IF (IZGRAD.EQ.0) GNRMIN=0.
    PRINT 24, TITLE
  24 FORMAT ( 5X, 20A4)
C   ПЕЧАТЬ НАЗВАНИЯ ДАННЫХ
    CALL REDNAM (NSTIM, KSUBJ, NPOINT, NAMSTI, NAMSUB, IEXCL, KEXCL,
    * INDFIX, IFIX, INDNAM, NAMES)
    IF (KSUBJ.EQ.0) CALL SCRDAT (NSTIM, DATA, IPRINT, FORDAT, NAMSTI)
    IF (KSUBJ.GE.1) CALL UNRDAT (NSTIM, KSUBJ, DATA, IPRINT, FORDAT,
    * NAMSTI, NAMSUB)
    * IF (IEXCL.GT.0.AND.KSUBJ.EQ.0) CALL SCAEXC (NSTIM, MDIM, NPOINT, DATA,
    * KEXCL, NAMSTI, MDIST, IFIX, COMNOR)
    * IF (IEXCL.GT.0.AND.KSUBJ.GE.1) CALL UNFEXC (NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT,
    * DATA, KEXCL, NAMSTI, NAMSUB, IFIX, COMNOR)
    * IF (ICTYPE.EQ.1) CALL KRUSIC (NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT, STIM, SUBJ)
    * IF (ICTYPE.EQ.2) CALL RANDIC (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, INRAND, 1)

```

```

C   ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОЛОВНОЙ ПРОГРАММЫ
    IF (ISTYPE.EQ.3) CALL REDCON (
      * STIM, SUBJ, NSTIM, KSUBJ, MDIM, IPRINT, NAMSTI, NAMSUB)
    IF (MIFWAY.EQ.1) PRINT 32
32  FORMAT (' GRADIENT METHOD, STEPSZ=TETA')
C   ПРИ MIFWAY=1 МИНИМУМ TETA ИЩЕТСЯ ГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ С ШАГОМ TETA
    IF (MIFWAY.EQ.2) READ 5, CONSTE
    IF (MIFWAY.EQ.2) PRINT 34, CONSTE
34  FORMAT (' GRADIENT METHOD, STEPSZ=', F10.8)
C   ПРИ MIFWAY=2 МИНИМУМ TETA ИЩЕТСЯ ГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ С ВВОДИМЫМ ШАГОМ CONSTE
    IF (MIFWAY.EQ.3) PRINT 36
36  FORMAT (' CONJUGATE GRADIENT METHOD')
C   ПРИ MIFWAY=3 МИНИМУМ TETA ИЩЕТСЯ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
    IF (KVMTPYR.EQ.1) PRINT 43, VIOLST
43  FORMAT (' VIOLENT MOTION=GRADIENT MOVE, STEPSZ=', F15.4)
    IF (KVMTPYR.EQ.2) PRINT 44
44  FORMAT (' VIOLENT MOTION NEW RANDOM INITIAL CONFIGURATION')
    IF (KVMTPYR.EQ.3) PRINT 45
45  FORMAT (' VIOLENT MOTION:STIM=GRAD')
C   СПОСОБ ПЕРЕХОДА К ПОИСКУ СЛЕДУЮЩЕГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА ЗАВИСИТ ОТ ПАРАМЕТРА
C   KVMTPYR: KVMTPYR=1 — СДВИГ ПО ГРАДИЕНТУ С ШАГОМ VIOLST; KVMTPYR=2 — НОВАЯ СЛУЧАЙНАЯ
C   СТАРТОВАЯ КОНФИГУРАЦИЯ; KVMTPYR=3 — НОВАЯ СТАРТОВАЯ КОНФИГУРАЦИЯ-СТАРЫЙ ГРАДИЕНТ
    NVIOLM=0
    IFIN=0
    DO 999 IVIOL=1, 999999
    KSTEP=0
      DO 350 ITER=1, 999999
    CALL NORCON (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, COMNOR, KSTEP, NVIOLM, CNRMIN)
    GRANRP=GRANOR
    IF (KSUBJ.EQ.0) CALL STETAG (STIM, GRSTIM, NSTIM, MDIM, MDIST, KAPTIE,
      * DATMIS, VMIN, KSTEP, UGRSTI, VGRSTI, DATA, DIST, TETA, IPRTPY)
    IF (KSUBJ.GE.1) CALL UTETAG (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, GRSTIM,
      * GRSUBJ, UGRSTI, VGRSTI, UGRSUB, VGRSUB, TETASB, DIST, DATA, TETA,
      * KAPTIE, KSTEP, DATMIS, VMIN)
    CALL CONMIN (NSTIM, KSUBJ, MDIM, TETMIN, TETA, KSTEP, KSTMIN,
      * STIM, SUBJ, STIMIN, SUBMIN, TETASB, TESMIN)
    CALL NORGRA (NSTIM, KSUBJ, MDIM, GRSTIM, GRSUBJ, GRANOR, COMNOR,
      * KSTEP, NVIOLM, GNRMIN)
    IF (KSTEP.EQ.0) TETAIC=TETA
    IF (KSTEP.GT.0) OTETA(KSTEP)=TETA
    IF (GRANOR.EQ.0) GO TO 400
    IF (TETA.LE.TEMIN) GO TO 400
    IF (KSTEP.EQ.MAXST) GO TO 450
    IF (KSTEP.LE.NSTCHT) GO TO 333
    IF (ABS(TETA-OTETA(KSTEP-NSTCHT))).LE.(STOPML*TETA) GO TO 450
333 KSTEP=KSTEP+1
    IF (MIFWAY.EQ.1) STEPSZ=TETA
    IF (MIFWAY.EQ.2) STEPSZ=CONSTE
    IF (MIFWAY.NE.3) CALL GRAMOV (
      * NSTIM, KSUBJ, MDIM, STEPSZ, STIM, SUBJ, GRSTIM, GRSUBJ, IFIX)
    IF (MIFWAY.EQ.3) CALL CONJGR (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ,
      * GRSTIM, GRSUBJ, CONSTI, CONSUB, GRANOR, GRANRP, KSTEP, IFIX)
350 CONTINUE
400 IFIN=1
450 IF (LASTPR.NE.0.AND.NVIOLM.LT.MAXVM.AND.IFIN.EQ.0) GO TO 500
    CALL PRICON (NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT, IFIN, TETMIN, GRANOR, TESMIN,
      * OTETA, STIMIN, SUBMIN, STIMMN, SUBJMN, CONFMN, DIST, NAMSTI, NAMSUB,
      * KSTEP, KSTMIN, NVIOLM, TETAIC, IRDIS)
    IF (KPICT.NE.0) CALL MERCON (NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT, STIMIN, SUBMIN,
      * CONFJN, IPICT, NCOLMN, NLINE, TITLE)
    IF (INTCAL.NE.0) CALL UNITE (NAMPRI, NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIMIN, SUBMIN,
      * DIST, IRDIS, NVIOLM, DATA, NAMSTI, NAMSUB)
500 IF (IFIN.EQ.1) STOP
    IF (NVIOLM.EQ.MAXVM) STOP
    NVIOLM=NVIOLM+1
    IF (KVMTPYR.EQ.1) CALL GRAMOV (
      * NSTIM, KSUBJ, MDIM, VIOLST, STIM, SUBJ, GRSTIM, GRSUBJ, IFIX)
    IF (KVMTPYR.EQ.2)
      * CALL RANDIC (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, INRAND, NVIOLM)
    IF (KVMTPYR.EQ.3)
      * CALL STEQGR (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, GRSTIM, GRSUBJ, IFIX)
999 CONTINUE
    END

```

```

SUBROUTINE REDNAM (NSTIM, KSUBJ, NPOINT, NAMSTI, NAMSUB,
  * IEXCL, KEXCL, INDFIX, IFIX, INDNAM, NAMES)
DIMENSION NAMSTI (1), NAMSUB (1), KEXCL (1), IFIX (1), NAMES (1)
COMMON/PICT/IPRS (210), IBLPIC, IZ, IPRDIM
C ПОДПРОГРАММА А) ФОРМИРУЕТ ИЛИ ЧИТАЕТ ИМЕНА ОБЪЕКТОВ (И ЭКСПЕРТОВ) ; ПРИ INDNAM > 0
C ИМЕНА ВВОДЯТСЯ ПО ФОРМАТУ 20A4, ПРИ INDNAM=0 ИМЕНАМИ СЛУЖАТ ПОРЯДКОВЫЕ НОМЕРА
C Б) ПРИ IEXCL > 0 ВВОДЯТСЯ И ПЕЧАТАЮТСЯ ИМЕНА ИСКЛЮЧАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ (И ЭКСПЕРТОВ) ,
C В) ПРИ INDFIX > 0 ВВОДЯТСЯ И ПЕЧАТАЮТСЯ ИМЕНА НЕСДВИГАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ (И ЭКСПЕРТОВ) .
  IF (INDNAM GT 0) GO TO 3
  DO 1 I=1, NSTIM
  1 NAMSTI (I) =IPRS (I)
  IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 5
  DO 2 J=1, KSUBJ
  2 NAMSUB (J) =IPRS (J)
  GO TO 5
  3 CONTINUE
  4 FORMAT (20A4)
  READ (1, 4) (NAMSTI (I), I=1, NSTIM)
  IF (KSUBJ GE 1) READ (1, 4) (NAMSUB (J), J=1, KSUBJ)
  5 CONTINUE
  IF (IEXCL .LE. 0) GO TO 90
  READ (3, 8) NSTIME
  8 FORMAT (14)
  IF (NSTIME .EQ. 0) GO TO 80
  READ (3, 4) (NAMES (I), I=1, NSTIME)
  PRINT 72, (NAMES (I), I=1, NSTIME)
  72 FORMAT (' NAMES OF EXCLUDED STIMULI'/(1X, 20A5))
  DO 76 I=1, NSTIM
  KEXCL (I) =0
  NAMST=NAMSTI (I)
  DO 74 IE=1, NSTIME
  74 IF (NAMES (IE) .EQ. NAMST) KEXCL (I) =1
  76 CONTINUE
  80 IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 90
  READ (3, 8) KSUBJE
  IF (KSUBJE .EQ. 0) GO TO 90
  READ (3, 4) (NAMES (I), I=1, KSUBJE)
  PRINT 82, (NAMES (I), I=1, KSUBJE)
  82 FORMAT (' NAMES OF EXCLUDED SUBJECTS'/(1X, 20A5))
  DO 86 J=1, KSUBJ
  KEXCL (J+NSTIM) =0
  NAMS=NAMSUB (J)
  DO 84 IE=1, KSUBJE
  84 IF (NAMES (IE) .EQ. NAMS) KEXCL (J+NSTIM) =1
  86 CONTINUE
  90 DO 94 I=1, NPOINT
  94 IFIX (I) =0
  IF (INDFIX .LE. 0) RETURN
  READ (4, 8) NSTIMF
  IF (NSTIMF .EQ. 0) GO TO 107
  READ (4, 4) (NAMES (I), I=1, NSTIMF)
  PRINT 102, (NAMES (I), I=1, NSTIMF)
  102 FORMAT (' FOLLOWING STIMULI ARE NOT MOVED'/(1X, 20A5))
  DO 106 I=1, NSTIM
  NAMST=NAMSTI (I)
  DO 104 IFX=1, NSTIMF
  104 IF (NAMES (IFX) EQ. NAMST) IFIX (I) =1
  106 CONTINUE
  107 IF (KSUBJ EQ 0) RETURN
  READ (4, 8) KSUBJF
  IF (KSUBJF .EQ. 0) RETURN
  READ (4, 4) (NAMES (I), I=1, KSUBJF)
  PRINT 108, (NAMES (I), I=1, KSUBJF)
  108 FORMAT (' FOLLOWING SUBJECTS ARE NOT MOVED'/(1X, 20A5))
  DO 110 J=1, KSUBJ
  NAMS=NAMSUB (J)
  DO 109 IFX=1, KSUBJF
  109 IF (NAMES (IFX) EQ. NAMS) IFIX (J+NSTIM) =1
  110 CONTINUE
  RETURN
  END

```

SUBROUTINE SCRDAT (NSTIM, PROXIM, IPRINT, FORDAT, NAMSTI)
DIMENSION PROXIM (1), FORDAT (1), FORPRN (1), NAMSTI (1)

C ЧТЕНИЕ МАТРИЦЫ БЛИЗОСТИ (ЗАДАЧА ШКАЛИРОВАНИЯ); ЧИТАЕТСЯ ПО СТРОКАМ

INDEND=0

NSTIMP=NSTIM-1

DO 1 IDIJ=1, NSTIMP

NREAD=NSTIM-IDIJ

INDBEG=INDEND+1

INDEND=INDEND+NREAD

READ (1, FORDAT) (PROXIM (IND), IND=INDBEG, INDEND)

1 IF (IPRINT.NE.0) PRINT 99, IDIJ, NAMSTI (IDIJ), (NAMSTI (IDIJ),

* NAMSTI (IDIJ+IND-INDBEG+1), PROXIM (IND), IND=INDBEG, INDEND)

99 FORMAT (1X, I4, '-STIM ', A4, 1X, 4 (' PR (' , A4, ' ', A4, ')=' , F11.5))

RETURN

END

SUBROUTINE UNRDAT (NSTIM, KSUBJ, PREF, IPRINT, FORDAT, NAMSTI, NAMSUB)

DIMENSION PREF (NSTIM, KSUBJ), FORDAT (1), NAMSTI (1), NAMSUB (1)

C ЧТЕНИЕ МАТРИЦЫ ПРЕДПОЧТЕНИЙ (ЗАДАЧА РАЗВЕРТЫВАНИЯ); ОТВЕТЫ ЭКСПЕРТОВ ИДУТ ПОДРЯД

READ (1, FORDAT) (PREF (I, J), I=1, NSTIM), J=1, KSUBJ)

IF (IPRINT.EQ.0) RETURN

DO 1 J=1, KSUBJ

1 PRINT 99, J, NAMSUB (J), (NAMSTI (I), NAMSUB (J), PREF (I, J), I=1, NSTIM)

99 FORMAT (1X, I4, '-SUBJ ', A4, 1X, 4 (' PR (' , A4, ' ', A4, ')=' , F11.5))

RETURN

END

SUBROUTINE KRUSIC (NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT, STIM, SUBJ)

DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1)

C ПОЛУЧЕНИЕ КРАСКАЛОВСКОЙ СТАРТОВОЙ КОНФИГУРАЦИИ; ВЫЗЫВАЕТСЯ ПРИ ICSTURE=1

PRINT 2

2 FORMAT (' KRUSKAL 'S INITIAL CONFIGURATION')

DO 7 L=1, MDIM

DO 5 I=1, NSTIM

5 STIM (I, L) = 0.

IF (KSUBJ.EQ.0) GO TO 7

DO 6 J=1, KSUBJ

6 SUBJ (J, L) = 0.

7 CONTINUE

DO 9 L=1, MDIM

RNKRIC=0.

DO 9 IPOINT=L, NPOINT, MDIM

RNKRIC=RNKRIC+1.

IF (IPOINT.GT.NSTIM) GO TO 8

STIM (IPOINT, L) = RNKRIC

GO TO 9

8 ISUBJ=IPOINT-NSTIM

SUBJ (ISUBJ, L) = RNKRIC

9 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE REDCON (STIM, SUBJ, NSTIM, KSUBJ, MDIM, IPRINT,

* NAMSTI, NAMSUB)

DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), NAMSTI (1), NAMSUB (1),

* FORIC (13)

C ЧТЕНИЕ СТАРТОВОЙ КОНФИГУРАЦИИ (ПРИ ICSTURE=3); IPRINT НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПЕЧАТАЕТСЯ

PRINT 2

2 FORMAT (' READ INITIAL CONFIGURATION')

READ (2, 10) FORIC

10 FORMAT (20A4)

READ (2, FORIC) ((STIM (I, L), L=1, MDIM), I=1, NSTIM)

IF (IPRINT.NE.0)

* PRINT 25, ((NAMSTI (I), L, STIM (I, L), L=1, MDIM), I=1, NSTIM)

25 FORMAT (4 (' STIM (' , A4, ' ', ' , I2, ')=' , F11.5))

IF (KSUBJ.EQ.0) RETURN

READ (2, FORIC) ((SUBJ (J, L), L=1, MDIM), J=1, KSUBJ)

IF (IPRINT.NE.0)

* PRINT 35, ((NAMSUB (J), L, SUBJ (J, L), L=1, MDIM), J=1, KSUBJ)

35 FORMAT (4 (' SUBJ (' , A4, ' ', ' , I2, ')=' , F11.5))

RETURN

END

```

SUBROUTINE SCAEXC(NSTIM, MDIM, NPOINT, PROXIM,
  * KEXCL, NAMSTI, MDIST, IFIX, COMNOR)
DIMENSION PROXIM(1), KEXCL(1), NAMSTI(1), IFIX(1)
С ПРИ IEXCL > 0 ИСКЛЮЧАЕТ ЧАСТЬ ДАННЫХ ИЗ МАТРИЦЫ БЛИЗОСТИ (ЗАДАЧА ШКАЛИРОВАНИЯ)
NSTIMN=0
DO 30 I=1, NSTIM
IF (KEXCL(I) .GT. 0) GO TO 30
NSTIMN=NSTIMN+1
NAMSTI(NSTIMN)=NAMSTI(I)
IFIX(NSTIMN)=IFIX(I)
30 CONTINUE
IS=1
JS=2
MDISTN=0
DO 40 ID=1, MDIST
IF (KEXCL(IS) .GT. 0 .OR. KEXCL(JS) .GT. 0) GO TO 40
MDISTN=MDISTN+1
PROXIM(MDISTN)=PROXIM(ID)
40 CALL INDNXT(IS, JS, IS, JS, NSTIM)
NSTIM=NSTIMN
MDIST=MDISTN
NPOINT=NSTIM
COMNOR=NPOINT
RETURN
END
SUBROUTINE UNFEXC(NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT, PREF,
  * KEXCL, NAMSTI, NAMSUB, IFIX, COMNOR)
DIMENSION PREF(1), KEXCL(1), NAMSTI(1), NAMSUB(1), IFIX(1)
С ПРИ IEXCL > 0 ИСКЛЮЧАЕТ ЧАСТЬ ДАННЫХ ИЗ МАТРИЦЫ УПОРЯДОЧЕНИЙ (3-ЧА РАЗВЕРТЫВАНИЯ)
NSTIMN=0
KSUBJN=0
DO 30 I=1, NSTIM
IF (KEXCL(I) .GT. 0) GO TO 30
NSTIMN=NSTIMN+1
NAMSTI(NSTIMN)=NAMSTI(I)
IFIX(NSTIMN)=IFIX(I)
30 CONTINUE
DO 60 J=1, KSUBJ
IF (KEXCL(J+NSTIM) .GT. 0) GO TO 60
KSUBJN=KSUBJN+1
NAMSUB(KSUBJN)=NAMSUB(J)
IFIX(KSUBJN+NSTIMN)=IFIX(J+NSTIM)
60 CONTINUE
INDPRE=0
NINPRE=0
DO 90 J=1, KSUBJ
DO 90 I=1, NSTIM
INDPRE=INDPRE+1
IF (KEXCL(I) .GT. 0 .OR. KEXCL(J+NSTIM) .GT. 0) GO TO 90
NINPRE=NINPRE+1
PREF(NINPRE)=PREF(INDPRE)
90 CONTINUE
NSTIM=NSTIMN
KSUBJ=KSUBJN
NPOINT=NSTIM+KSUBJ
COMNOR=NPOINT
RETURN
END
SUBROUTINE INDNXT(I, J, NEXTI, NEXTJ, NSTIM)
С ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОМЕРОВ ОБЪЕКТОВ ПО РАСПОЛОЖЕНИЮ ИХ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ В МАТРИЦЕ
IF IJ EQ NSTIM GO TO 1
NEXTI=I
NEXTJ=J+1
RETURN
CONTINUE
NEXTI=I+1
NEXTJ=NEXTI+1
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE STETAG (ISTIM, GRAD, NSTIM, MDIM, MDIST, KAPTIE, DATMIS, VMIN,
* KSTEP, UGRAD, VGRAD, PROXIM, DIST, TETA, IPRTYP)
DIMENSION STIM (NSTIM, 1), GRAD (NSTIM, 1), UGRAD (NSTIM, 1),
* VGRAD (NSTIM, 1), PROXIM (1), DIST (1)
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕТА И ЕГО ГРАДИЕНТА В ЗАДАЧЕ ШКАЛИРОВАНИЯ (ДЛЯ МАТРИЦЫ БЛИЗОСТИ)
U=0
V=0
DO 15 IS=1, NSTIM
DO 15 L=1, MDIM
UGRAD (IS, L)=0
15 VGRAD (IS, L)=0
IDIJ=0
NSTIMP=NSTIM-1
DO 17 JS=1, NSTIMP
JSBG=IS+1
DO 17 JS=JSBG, NSTIM
IDIJ=IDIJ+1
DIS=0
DO 16 L=1, MDIM
DL=STIM (IS, L)-STIM (JS, L)
16 DIS=DIS+DL*DL
17 DIST (IDIJ)=DIS
MDISTP=MDIST-1
IS=1
JS=2
DO 121 IDIJ=1, MDISTP
CALL INDNXT (IS, JS, KS, LS, NSTIM)
IF (PROXIM (IDIJ) EQ DATMIS) GO TO 120
IDKLBG=IDIJ+1
DO 99 IDKL=IDKLBG, MDIST
IF (PROXIM (IDKL) EQ DATMIS) GO TO 90
DISDIF=DIST (IDIJ)-DIST (IDKL)
PRODIF=PROXIM (IDIJ)-PROXIM (IDKL)
IF (IPRTYP EQ 2) PRODIF=-PRODIF
IF (PRODIF) 30, 20, 40
20 IF (KAPTIE NE 2) GO TO 90
IF (DISDIF) 60, 90, 60
30 IF (DISDIF) 50, 90, 60
40 IF (DISDIF) 60, 90, 50
50 V=V+DISDIF*DISDIF
DO 57 L=1, MDIM
STDFIJ=STIM (IS, L)-STIM (JS, L)
STDFKL=STIM (KS, L)-STIM (LS, L)
VGRAD (IS, L)=VGRAD (IS, L)+DISDIF*STDFIJ
VGRAD (JS, L)=VGRAD (JS, L)-DISDIF*STDFIJ
VGRAD (KS, L)=VGRAD (KS, L)-DISDIF*STDFKL
VGRAD (LS, L)=VGRAD (LS, L)+DISDIF*STDFKL
57 CONTINUE
GO TO 90
60 U=U+DISDIF*DISDIF
DO 67 L=1, MDIM
STDFIJ=STIM (IS, L)-STIM (JS, L)
STDFKL=STIM (KS, L)-STIM (LS, L)
UGRAD (IS, L)=UGRAD (IS, L)+DISDIF*STDFIJ
UGRAD (JS, L)=UGRAD (JS, L)-DISDIF*STDFIJ
UGRAD (KS, L)=UGRAD (KS, L)-DISDIF*STDFKL
UGRAD (LS, L)=UGRAD (LS, L)+DISDIF*STDFKL
67 CONTINUE
90 CONTINUE
CALL INDNXT (KS, LS, KS, LS, NSTIM)
99 CONTINUE
120 CONTINUE
CALL INDNXT (IS, JS, IS, JS, NSTIM)
121 CONTINUE
V=V+U
DO 130 IS=1, NSTIM
DO 130 L=1, MDIM
130 VGRAD (IS, L)=VGRAD (IS, L)+UGRAD (IS, L)
TETASQ=0
IF (V GE VMIN) TETASQ=U/V
IF (V LT VMIN) PRINT 133, V, KSTEP
133 FORMAT ( ALL POINTS COINCIDE, V=, F15.12, ' STEP=', I4)
C ЕСЛИ ВСЕ ТОЧКИ ОЧЕНЬ БЛИЗКИ ДРУГ К ДРУГУ, ВЫДАЕТСЯ СООБЩЕНИЕ
TETA=SQRT (TETASQ)
DO 145 IS=1, NSTIM
DO 145 L=1, MDIM
145 GRAD (IS, L)=UGRAD (IS, L)-TETASQ*VGRAD (IS, L)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE UTETAG (INSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, GRSTIM, GRSUBJ,
• UGRSTI, VGRSTI, UGRSUB, VGRSUB, TETASB, DIST,
• PREF, TETA, KAPTIE, KSTEP, DATMIS, VMIN)
DIMENSION PREF (INSTIM, KSUBJ)
• STIM (INSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), GRSTIM (INSTIM, 1),
• GRSUBJ (KSUBJ, 1), UGRSTI (INSTIM, 1), VGRSTI (INSTIM, 1),
• UGRSUB (1) VGRSUB (1) TETASB (1), DIST (1)
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕТА И ЕГО ГРАДИЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗВЕРТЫВАНИЯ (МАТРИЦА ПРЕДПОЧТЕНИЙ)
DO 3 L=1, MDIM
DO 3 I=1, NSTIM
3 GRSTIM (I, L)=0
TETASQ=0
DO 140 J=1, KSUBJ
UJ=0
VJ=0
DO 15 L=1, MDIM
UGRSUB (L)=0
VGRSUB (L)=0
DO 15 I=1, NSTIM
UGRSTI (I, L)=0
15 VGRSTI (I, L)=0
DO 17 I=1, NSTIM
DIS=0
DO 16 L=1, MDIM
DI=STIM (I, L)-SUBJ (J, L)
16 DIS=DIS+DI*DI
17 DIST (I)=DIS
NSTIMP=NSTIM-1
DO 120 I=1, NSTIMP
IF (PREF (I, J) EQ DATMIS) GO TO 120
ICOMP=I+1
DO 90 II=ICOMP, NSTIM
IF (PREF (II, J) EQ DATMIS) GO TO 90
DISDIF=DIS-DIST (II)-DIST (II)
IF (PREF (I, J)-PREF (II, J)) 30, 20, 40
20 IF (KAPTIE LT, 2) GO TO 90
IF (DISDIF) 60, 90, 60
30 IF (DISDIF) 50, 90, 60
40 IF (DISDIF) 60, 90, 50
50 VJ=VJ+DISDIF*DISDIF
DO 57 L=1, MDIM
VGRSTI (I, L)-VGRSTI (I, L)+DISDIF
VGRSTI (II, L)-VGRSTI (II, L)-DISDIF
57 VGRSUB (L)-VGRSUB (L)-DISDIF*(STIM (I, L)-STIM (II, L))
GO TO 90
60 UJ=UJ+DISDIF*DISDIF
DO 67 L=1, MDIM
UGRSTI (I, L)-UGRSTI (I, L)+DISDIF
UGRSTI (II, L)-UGRSTI (II, L)-DISDIF
67 UGRSUB (L)-UGRSUB (L)-DISDIF*(STIM (I, L)-STIM (II, L))
90 CONTINUE
120 CONTINUE
VJ=VJ+UJ
DO 130 L=1, MDIM
VGRSUB (L)-VGRSUB (L)+UGRSUB (L)
DO 130 I=1, NSTIM
VGRSTI (I, L)-VGRSTI (I, L)+UGRSTI (I, L)
UGRSTI (I, L)-UGRSTI (I, L)*(STIM (I, L)-SUBJ (J, L))
130 VGRSTI (I, L)-VGRSTI (I, L)*(STIM (I, L)-SUBJ (J, L))
TETASJ=0
IF (VJ GE VMIN) GO TO 134
PRINT 133, VJ, KSTEP, J
133 FORMAT (' CIRCLE, VJ=', F15.12, ' STEP=', I5, ' SUBJECT N ', I6)
C ЕСЛИ ВСЕ ТОЧКИ ОБЪЕКТЫ ЛЕЖАТ ПРИМЕРНО НА СФЕРЕ, ВЫДАЕТСЯ СООБЩЕНИЕ
GO TO 136
134 TETASJ=UJ/VJ
DO 135 L=1, MDIM
GRSUBJ (J, L)=(UGRSUB (L)-TETASJ-VGRSUB (L))/VJ
DO 135 I=1, NSTIM
135 GRSTIM (I, L)=GRSTIM (I, L)+(UGRSTI (I, L)-TETASJ-VGRSTI (I, L))/VJ
136 TETASB (J)=SORT (TETASJ)
TETASQ=TETASQ+TETASJ
140 CONTINUE
TETA= SORT (TETASQ/KSUBJ)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE NORCON (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, COMNOR,
* KSTEP, NVIOLM, CNRMIN)
DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1)
C НОРМИРОВАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ
CNFNOR=0
DO 3 L=1, MDIM
DO 1 I=1, NSTIM
1 CNFNOR=CNFNOR+STIM (I, L) *STIM (I, L)
IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 3
DO 2 J=1, KSUBJ
2 CNFNOR=CNFNOR+SUBJ (J, L) *SUBJ (J, L)
3 CONTINUE
IF (CNFNOR GT CNRMIN) GO TO 5
PRINT 4, CNFNOR, KSTEP, NVIOLM
4 FORMAT (' ALL POINTS NEAR ZERO, CNFNOR=' ,F15.12,
* ' KSTEP=' ,J3, ' NVIOLM=' ,J3)
C ЕСЛИ НОРМА КОНФИГУРАЦИИ ОЧЕНЬ МАЛА, ВЫДАЕТСЯ СООБЩЕНИЕ
RETURN
5 CNFMUL=SQRT (COMNOR/CNFNOR)
DO 8 L=1, MDIM
DO 6 I=1, NSTIM
6 STIM (I, L) =STIM (I, L) *CNFMUL
IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 8
DO 7 J=1, KSUBJ
7 SUBJ (J, L) =SUBJ (J, L) *CNFMUL
8 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE CONMIN (NSTIM, KSUBJ, MDIM, TETMIN, TETA, KSTEP, KSTMIN,
* STIM, SUBJ, STIMIN, SUBMIN, TETASB, TESMIN)
DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), TETASB (1),
* STIMIN (NSTIM, 1), SUBMIN (KSUBJ, 1), TESMIN (1)
C СОХРАНЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ТЕТА
IF (KSTEP EQ 0) GO TO 1
IF (TETA GT TETMIN) RETURN
1 CONTINUE
DO 4 L=1, MDIM
DO 2 I=1, NSTIM
2 STIMIN (I, L) =STIM (I, L)
IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 4
DO 3 J=1, KSUBJ
TESMIN (J) =TETASB (J)
3 SUBMIN (J, L) =SUBJ (J, L)
4 CONTINUE
TETMIN=TETA
KSTMIN=KSTEP
RETURN
END
SUBROUTINE NORGRA (NSTIM, KSUBJ, MDIM, GRSTIM, GRSUBJ,
* GRANOR, COMNOR, KSTEP, NVIOLM, GNRMIN)
DIMENSION GRSTIM (NSTIM, 1), GRSUBJ (KSUBJ, 1)
C НОРМИРОВАНИЕ ГРАДИЕНТА
GRANOR=0
DO 3 L=1, MDIM
DO 1 I=1, NSTIM
1 GRANOR=GRANOR+GRSTIM (I, L) *GRSTIM (I, L)
IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 3
DO 2 J=1, KSUBJ
2 GRANOR=GRANOR+GRSUBJ (J, L) *GRSUBJ (J, L)
3 CONTINUE
IF (GRANOR GT GNRMIN) GO TO 5
PRINT 4, GRANOR, KSTEP, NVIOLM
4 FORMAT (' GRADIENT NEAR ZERO, GRANOR=' ,F15.12, ' KSTEP=' ,J3,
* ' NVIOLM=' ,J3)
C ЕСЛИ НОРМА ГРАДИЕНТА ОЧЕНЬ МАЛА, ВЫДАЕТСЯ СООБЩЕНИЕ
RETURN
5 GRAMUL=SQRT (COMNOR/GRANOR)
DO 8 L=1, MDIM
DO 6 I=1, NSTIM
6 GRSTIM (I, L) =GRSTIM (I, L) *GRAMUL
IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 8
DO 7 J=1, KSUBJ
7 GRSUBJ (J, L) =GRSUBJ (J, L) *GRAMUL
8 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GRAMOV (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STEPSZ, STIM, SUBJ,
  * GRSTIM, GRSUBJ, IFIX)
  DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), GRSTIM (NSTIM, 1),
  * GRSUBJ (KSUBJ, 1), IFIX (1)
C СДВИГ КОНФИГУРАЦИИ ПО ГРАДИЕНТУ, ВЫЗЫВАЕТСЯ ПРИ MIFWAY=1, 2 ИЛИ KVMYTP=1
  DO 2 I=1, NSTIM
  IF (IFIX (I) GT 0) GO TO 2
  DO 1 L=1, MDIM
  1 STIM (I, L) =STIM (I, L) -STEPSZ*GRSTIM (I, L)
  2 CONTINUE
  IF (KSUBJ EQ 0) RETURN
  DO 4 J=1, KSUBJ
  IF (IFIX (J+NSTIM) GT 0) GO TO 4
  DO 3 L=1, MDIM
  3 SUBJ (J, L) =SUBJ (J, L) -STEPSZ*GRSUBJ (J, L)
  4 CONTINUE
  RETURN
  END
SUBROUTINE CONJGR (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, GRSTIM, GRSUBJ,
  * CONSTI, CONSUB, GRANOR, GRANRP, KSTEP, IFIX)
  DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), GRSTIM (NSTIM, 1),
  * GRSUBJ (KSUBJ, 1), CONSTI (NSTIM, 1), CONSUB (KSUBJ, 1), IFIX (1)
C СДВИГ КОНФИГУРАЦИИ ПО МЕТОДУ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ (ПРИ MIFWAY=3)
  IF (KSTEP GT 1) GO TO 4
  DO 3 L=1, MDIM
  DO 1 I=1, NSTIM
  1 CONSTI (I, L) =GRSTIM (I, L)
  IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 3
  DO 2 J=1, KSUBJ
  2 CONSUB (J, L) =GRSUBJ (J, L)
  3 CONTINUE
  STEPSZ = 2
  GO TO 7
  4 STEPSZ =GRANOR/GRANRP
  DO 7 L=1, MDIM
  DO 5 I=1, NSTIM
  5 CONSTI (I, L) =GRSTIM (I, L) +STEPSZ*CONSTI (I, L)
  IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 7
  DO 6 J=1, KSUBJ
  6 CONSUB (J, L) =GRSUBJ (J, L) +STEPSZ*CONSUB (J, L)
  7 CONTINUE
  DO 12 I=1, NSTIM
  IF (IFIX (I) .GT 0) GO TO 12
  DO 11 L=1, MDIM
  11 STIM (I, L) =STIM (I, L) -STEPSZ*CONSTI (I, L)
  12 CONTINUE
  IF (KSUBJ EQ 0) RETURN
  DO 14 J=1, KSUBJ
  IF (IFIX (J+NSTIM) GT 0) GO TO 14
  DO 13 L=1, MDIM
  13 SUBJ (J, L) =SUBJ (J, L) -STEPSZ*CONSUB (J, L)
  14 CONTINUE
  RETURN
  END
SUBROUTINE STEOGR (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ,
  * GRSTIM, GRSUBJ, IFIX)
  DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), GRSTIM (NSTIM, 1),
  * GRSUBJ (KSUBJ, 1), IFIX (1)
C ПРИРАВНИВАНИЕ НОВОЙ КОНФИГУРАЦИИ СТАРОМУ ГРАДИЕНТУ ДЛЯ ПЕРЕХОДА К ПОИСКУ
C СЛЕДУЮЩЕГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА, ВЫЗЫВАЕТСЯ ПРИ KVMYTP=3
  DO 2 I=1, NSTIM
  IF (IFIX (I) GT 0) GO TO 2
  DO 1 L=1, MDIM
  1 STIM (I, L) =GRSTIM (I, L)
  2 CONTINUE
  IF (KSUBJ EQ 0) RETURN
  DO 4 J=1, KSUBJ
  IF (IFIX (J+NSTIM) GT 0) GO TO 4
  DO 3 L=1, MDIM
  3 SUBJ (J, L) =GRSUBJ (J, L)
  4 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE PRICON (NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT, IFIN, TETA, GRANOR,
  TETASB, OTETA, STIM, SUBJ, STIMMN, SUBJMN,
  CONFMN, DIST, NAMSTI, NAMSUB, KSTEP, KSTMIN, NVIOLM, TETAIC, IRDIS)
DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), TETASB (1), OTETA (1), IRDIS (1),
  STIMMN (1), SUBJMN (1), CONFMN (1), DIST (1), NAMSTI (1), NAMSUB (1)
COMMON/PICT/IPRS (210), IBLPIC, IZ, IPRDIM
C ПЕЧАТЬ КОНФИГУРАЦИИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ НАЙДЕННОМУ МИНИМУМУ TETA
IF (IFIN NE 0) PRINT 2, GRANOR
2 FORMAT (' CONVERGENCE WAS ACHIEVED, GRANOR=', F15. 12)
C ЕСЛИ АЛГОРИТМ СОШЕЛСЯ, ТО ПЕЧАТАЕТСЯ СООБЩЕНИЕ И НОРМА ГРАДИЕНТА
5 PRINT 8, NVIOLM, KSTEP
8 FORMAT (' NUMBER OF VIOLENT MOTIONS= ', I4, ' NUMBER OF ITERATIONS',
  ' ', I4)
C ПЕЧАТАЕТСЯ НОМЕР ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА И ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ, ЗА КОТОРОЕ ОН ПОЛУЧЕН
IF (KSTEP GT 0) PRINT 20
20 FORMAT (' HISTORY OF COMPUTATIONS ')
IZ=0
IF (KSTEP. GT 0) PRINT 24, IZ, TETAIC, (I, OTETA (I), I=1, KSTEP)
24 FORMAT (4 (' TETA (' I4, ')=', F15. 12))
C ПЕЧАТАЕТСЯ ИСТОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ—ЗНАЧЕНИЯ TETA В ПРОЦЕССЕ СЧЕТА
PRINT 27, KSTMIN
27 FORMAT (' MINIMUM WAS FOUND AT THE ITERATION N ', I4,
  ' MINIMAL CONFIGURATION IS PRINTED')
PRINT 39, TETA
39 FORMAT (' TETA=', F15 12)
C ПЕЧАТАЕТСЯ МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ TETA И НОМЕР ИТЕРАЦИИ, НА КОТОРОЙ ОНО НАЙДЕНО
DO 45 I=1, NSTIM
45 IF (KSUBJ. EQ. 0)
  *PRINT 55, I, NAMSTI (I), IPRS (I), (NAMSTI (I), L, STIM (I, L), L=1, MDIM)
55 FORMAT (1X, I4, '-STIM ', A4, '(=', A4, ' FOR PLOTS)',
  ' 2 (' STIM (' A4, ', ', I2, ')=', F11. 5))
C В ЗАДАЧЕ ШКАЛИРОВАНИЯ ПЕЧАТАЮТСЯ: ПОРЯДКОВЫЙ НОМЕР ОБЪЕКТА, ИМЯ ОБЪЕКТА,
C СИМВОЛ ОБЪЕКТА НА МАШИННЫХ ЧЕРТЕЖАХ И КООРДИНАТЫ
DO 95 L=1, MDIM
STIMMN (L)=0
DO 91 I=1, NSTIM
91 STIMMN (L)=STIMMN (L)+STIM (I, L)
SUBJMN (L)=0
IF (KSUBJ. EQ. 0) GO TO 95
DO 92 J=1, KSUBJ
92 SUBJMN (L)=SUBJMN (L)+SUBJ (J, L)
95 CONTINUE
DO 102 L=1, MDIM
CONFMN (L)=STIMMN (L)+SUBJMN (L)
STIMMN (L)=STIMMN (L)/NSTIM
IF (KSUBJ. EQ. 0) GO TO 102
SUBJMN (L)=SUBJMN (L)/KSUBJ
CONFMN (L)=CONFMN (L)/NPOINT
102 CONTINUE
IF (KSUBJ. EQ. 0) PRINT 105, (L, STIMMN (L), L=1, MDIM)
105 FORMAT (32X, 2 (' MSTI (' 2X, I3, 2X, ')=', F11.5))
C ПЕЧАТЬ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИИ КООРДИНАТ В ЗАДАЧЕ ШКАЛИРОВАНИЯ
IF (KSUBJ. EQ. 0) RETURN
DO 115 I=1, NSTIM
DIS=0
DO 110 L=1, MDIM
DL= STIM (I, L) -SUBJMN (L)
110 DIS=DIS+DL*DL
115 DIST (I)=SQRT (DIS)
CALL IRANK (DIST, IRDIS, NSTIM)
DO 117 I=1, NSTIM
117 PRINT 118, I, NAMSTI (I), IPRS (I), DIST (I), IRDIS (I),
  (NAMSTI (I), L, STIM (I, L), L=1, MDIM)
118 FORMAT (1X, I4, '-STIM ', A4, '(=', A4, ' FOR PLOTS)-DIST=', F11. 5,
  ' *RD I=', I3, ' * 2 (' STIM (' A4, ', ', I2, ')=', F11 5))
C В ЗАДАЧЕ РАЗВЕРТЫВАНИЯ ПЕЧАТАЕТСЯ СПЕДУЮЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОБЪЕКТАХ:
C ПОРЯДКОВЫЙ НОМЕР, ИМЯ, СИМВОЛ НА МАШИННЫХ ЧЕРТЕЖАХ, РАССТОЯНИЕ ОТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ
C ТОЧЕК—ЭКСПЕРТОВ И КООРДИНАТЫ
PRINT 119, (L, STIMMN (L), L=1, MDIM)
119 FORMAT (58X, 2 (' MSTI (' 2X, I3, 2X, ')=', F11 5))
C ПЕЧАТЬ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИИ КООРДИНАТ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧЕ РАЗВЕРТЫВАНИЯ

```

```

C   ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОДПРОГРАММЫ PRICON
DO 120 J=1, KSUBJ
120 PRINT 125, J, NAMSUB (J), IPRS (J+NSTIM), TETASB (J),
    * (NAMSUB (J), L, SUBJ (J, L), L=1, MDIM)
125 FORMAT (1X, I4, '-SUBJ ', A4, ' (= ', A4, ' FOR PLOTS) *TETASB= ', F10.7
    * ' ', 6X, ' ', 2 ( ' SUBJ ( ', A4, ' ', ' ', 12, ' ) = ', F11.5) )
C ПЕЧАТАЕТСЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ЭКСПЕРТАХ ПОРЯДКОВЫЙ НОМЕР, ИМЯ, ЗНАЧЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬ
C НОГО КОЭФФИЦИЕНТА СООТВЕТСТВИЯ (УСРЕДНЕНИЕ КОТОРЫХ ДАЕТ ТЕТА) И КООРДИНАТЫ
PRINT 136, (L, SUBJMN (L), L=1, MDIM)
136 FORMAT (58X, 2 ( ' MSUB ( ', 2X, I3, 2X, ' ) = ', F11.5) )
C ПЕЧАТЬ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ (ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ) КООРДИНАТ ТЕЧЕК-ЭКСПЕРТОВ
C ПЕЧАТЬ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ КООРДИНАТ ВСЕХ ТОЧЕК КОНФИГУРАЦИИ
PRINT 137, (L, CONFMN (L), L=1, MDIM)
137 FORMAT (58X, 2 ( ' MCON ( ', 2X, I3, 2X, ' ) = ', F11.5) )
RETURN
END
SUBROUTINE IRANK (REALNM, INRANK, NUMNUM)
DIMENSION REALNM (1), INRANK (1)
C РАНЖИРОВКА РАССТОЯНИЙ ПРИ ПЕЧАТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЗАДАЧИ РАЗВЕРТЫВАНИЯ
DO 1 I=1, NUMNUM
1 INRANK (I) = 0
NRANK=1
NFUNL=1
DO 6 J=1, 999999
RENMIN=REALNM (NFUNL)
DO 2 I=1, NUMNUM
IF (INRANK (I) NE 0) GO TO 2
REALNI=REALNM (I)
IF (REALNI LT RENMIN) RENMIN=REALNI
2 CONTINUE
INLAB=0
DO 3 I=1, NUMNUM
IF (REALNM (I) EQ RENMIN) INRANK (I) = NRANK
IF (INLAB NE 0) GO TO 3
IF (INRANK (I) NE 0) GO TO 3
NFUNL=I
INLAB=1
3 CONTINUE
IF (INLAB EQ 0) RETURN
NRANK=NRANK+1
6 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE MERCON (NSTIM, KSUBJ, MDIM, NPOINT, STIM, SUBJ, CONFJN
    * IPICT, NCOLMN, NLINE, TITLE)
DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1), CONFJN (NPOINT, 1),
    * IPICT (1), TITLE (20)
C ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫЗОВА ПОДПРОГРАММЫ PICTUR, ВЫЗЫВАЕТСЯ ПРИ KPICT=1
DO 1 IPOINT=1, NPOINT
IF (MDIM EQ 1) CONFJN (IPOINT, 2) = 0.
DO 1 L=1, MDIM
IF (IPOINT LE NSTIM) CONFJN (IPOINT, L) = STIM (IPOINT, L)
1 IF (IPOINT GT NSTIM) CONFJN (IPOINT, L) = SUBJ (IPOINT-NSTIM, L)
IF (MDIM GT 1) GO TO 6
PRINT 3
3 FORMAT (1X, 120 ( '- '))
PRINT 4, TITLE
4 FORMAT (3X, 20A4)
CALL PICTUR (CONFJN (1, 1), CONFJN (1, 2), NPOINT, IPICT, NCOLMN, 1)
RETURN
6 MDIMP=MDIM-1
DO 9 L=1, MDIMP
LN=L+1
PRINT 3
DO 9 IL=LN, MDIM
PRINT 8, TITLE, L, IL
8 FORMAT (3X, 20A4 ' DIMENSIONS ', I3, ' (X) AND ', I3, ' (Y) ')
C ПЕЧАТАЕТСЯ НАЗВАНИЕ ДАННЫХ И НОМЕРА КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ
9 CALL PICTUR (CONFJN (1, L), CONFJN (1, IL), NPOINT, IPICT, NCOLMN, NLINE)
RETURN
END

```

SUBROUTINE PICTUR (X, Y, N, IPICT, NCOLMN, NLINE)
COMMON/PICT/IPRS (210), IBLPIC, IZ, IPRDIM
DIMENSION X (1), Y (1), IPICT (NCOLMN, NLINE)

С ВЫДАЧА КОНФИГУРАЦИИ В ВИДЕ ЧЕРТЕЖА (КАРТИНКИ) ИЗ NLINE=2 СТОЛБЦОВ, NCOLMN СТРОК

```
SCFX=NCOLMN-1
SCFY=NLINE-1
DO 1 J=1, NCOLMN
DO 1 I=1, NLINE
1 IPICT (J, I)=IBLPIC
XMAX=X (1)
XMIN=X (1)
YMAX=Y (1)
YMIN=Y (1)
DO 2 I=1, N
IF (X (I) LT. XMIN) XMIN=X (I)
IF (X (I) GT. XMAX) XMAX=X (I)
IF (Y (I) LT. YMIN) YMIN=Y (I)
IF (Y (I) GT. YMAX) YMAX=Y (I)
2 CONTINUE
XINT=XMAX-XMIN
YINT=YMAX-YMIN
SCALE=XINT
IF (YINT GT SCALE) SCALE=YINT
IF (SCALE LE 0) SCALE=1.
SCFX=SCFX/SCALE
SCFY=SCFY/SCALE
DO 4 I=1, N
ISYMBL=IZ
IF (I LE IPRDIM) ISYMBL=IPRS (I)
XNRM= (X (I)-XMIN)*SCFX+1 5
YNRM= (Y (I)-YMIN)*SCFY+1 5
NX=XNRM
NY=YNRM
ISYMPR=IPICT (NX, NY)
IF (ISYMPR NE. IBLPIC) PRINT 3, ISYMPR, ISYMBL
```

3 FORMAT (' TWO POINTS COINCIDE : ', A3, '-', A3)

**С ЕСЛИ НЕСКОЛЬКО ТОЧЕК СОВПАДАЮТ, ТО НА ЧЕРТЕЖЕ ПЕЧАТАЕТСЯ ТОЛЬКО НОМЕР ПОСЛЕДНЕЙ
С ИЗ НИХ, НОМЕРА ОСТАЛЬНЫХ ПЕЧАТАЮТСЯ СВЕРХУ, НАД ЧЕРТЕЖОМ**

IPICT (NX, NY)=ISYMBL

4 CONTINUE

PRINT 6

6 FORMAT (1X, 120 ('-'))

DO 8 I=1, NLINE

IUP=NLINE+1-I

PRINT 7, (IPICT (J, IUP), J=1, NCOLMN)

7 FORMAT (1X, 60A2)

8 CONTINUE

PRINT 6

RETURN

END

BLOCK DATA

С СИМВОЛЫ ДЛЯ МАШИННЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ (210 СИМВОЛОВ)

```
COMMON/PICT/IPRS (210), IBLPIC, IZ, IPRDIM
DATA IBLPIC/' ', IZ/' ', IPRDIM/210/
DATA IPRS/'1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10',
1 '11', '12', '13', '14', '15', '16', '17', '18', '19', '20', '21', '22',
2 '23', '24', '25', '26', '27', '28', '29', '30', '31', '32', '33', '34',
3 '35', '36', '37', '38', '39', '40', '41', '42', '43', '44', '45', '46',
4 '47', '48', '49', '50', '51', '52', '53', '54', '55', '56', '57', '58',
5 '59', '60', '61', '62', '63', '64', '65', '66', '67', '68', '69', '70',
6 '71', '72', '73', '74', '75', '76', '77', '78', '79', '80', '81', '82',
7 '83', '84', '85', '86', '87', '88', '89', '90', '91', '92', '93', '94',
8 '95', '96', '97', '98', '99', 'A0', 'A1', 'A2', 'A3', 'A4', 'A5', 'A6',
9 'A7', 'A8', 'A9', 'B0', 'B1', 'B2', 'B3', 'B4', 'B5', 'B6', 'B7', 'B8',
* 'B9', 'C0', 'C1', 'C2', 'C3', 'C4', 'C5', 'C6', 'C7', 'C8', 'C9', 'D0',
A 'D1', 'D2', 'D3', 'D4', 'D5', 'D6', 'D7', 'D8', 'D9', 'E0', 'E1', 'E2',
B 'E3', 'E4', 'E5', 'E6', 'E7', 'E8', 'E9', 'F0', 'F1', 'F2', 'F3', 'F4',
C 'F5', 'F6', 'F7', 'F8', 'F9', 'G0', 'G1', 'G2', 'G3', 'G4', 'G5', 'G6',
D 'G7', 'G8', 'G9', 'H0', 'H1', 'H2', 'H3', 'H4', 'H5', 'H6', 'H7', 'H8',
E 'H9', 'I0', 'I1', 'I2', 'I3', 'I4', 'I5', 'I6', 'I7', 'I8', 'I9', 'J0',
F 'J1', 'J2', 'J3', 'J4', 'J5', 'J6', 'J7', 'J8', 'J9', 'K0', 'K1', 'K2',
G 'K3', 'K4', 'K5', 'K6', 'K7', 'K8', 'K9', 'L0' /
END
```

SUBROUTINE URAND (URANDN, IY)
 DOUBLE PRECISION HALFM, DATAN, DSQRT
 DATA M2/0, ITWO/2/
 С ПОЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ
 С АДАПТИРОВАНА ИЗ ФОРСАЙТ И ДР., 1980, С 266-267/
 IF (M2. NE. 0) GO TO 20

```

M=1
10 M2=M
M=ITWO*M2
IF (M. GT. M2) GO TO 10
HALFM=M2
IA=8*IDINT (HALFM-DATAN (1. D0)/8. D0) +5;
IC=2*IDINT (HALFM*(0. 5D0-DSQRT (3. D0)/8. D0) ) +1
MIC=(M2-IC) +M2
S=0. 5/HALFM
20 IY=IY+IA
IF (IY. GT. MIC) IY=(IY-M2) -M2
IY=IY+IC
IF (IY/2. GT. M2) IY=(IY-M2) -M2
IF (IY. LT. 0) IY=(IY+M2) +M2
URANDN= FLOAT (IY) *S
RETURN
END

```

```

.....
UNITE  START  0          * ПОДПРОГРАММА UNITE. АВТОР-
      PRINT  NOGEN      * А.Б. КАМЕНСКАЯ. НАЗНАЧЕНИЕ - ДИНАМИ-
      SAVE   (14, 12)   * ЧЕСКИЙ ВЫЗОВ ПОДПРОГРАММ НА
      BALR   2, 0       * ФОРТРАНЕ ВО ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
      USING  *, 2       * ОСНОВНОЙ ПРОГРАММЫ. ПЕРВЫЙ АРГУ-
      LR     4, 13      * МЕНТ ПОДПРОГРАММЫ UNITE-МАССИВ
      LA     13, SOHR   * ДЛИНОЙ 8 БАЙТОВ, СОДЕРЖАЩИЙ ИМЯ
      ST     13, 8(4)   * ВЫЗЫВАЕМОЙ ПОДПРОГРАММЫ. ОСТАЛЬНЫЕ
      ST     4, 4(13)   * АРГУМЕНТЫ - АРГУМЕНТЫ ФОРТРАННОЙ
      L      3, 0(1)    * ПОДПРОГРАММЫ (ИХ МОЖЕТ И НЕ БЫТЬ),
      MVC    NAME(8), 0(3) * ВЫЗЫВАЕМАЯ ФОРТРАННАЯ ПОДПРОГРАМ-
      CLC    NAME(3), -C' END' * МА ДОЛЖНА БЫТЬ ОТРЕДАКТИРОВАНА С
      BE     DEL        * РАЗРЕШЕНИЕМ ВСЕХ ВНЕШНИХ ССЫЛОК
      LA     7, 10      * И ПОМЕЩЕНА В БИБЛИОТЕКУ ЗАГРУЗОЧ-
      LA     5, NAMS    * НЫХ МОДУЛЕЙ. В ВЫЗЫВАЕМОЙ ФОРТРАН-
      LA     6, ADRS    * НОЙ ПОДПРОГРАММЕ НЕЛЬЗЯ ИСПОЛЬЗО-
      POISK  CLC        * ВАТЬ ИД С НОМЕРАМИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫМИ
      BE     MET        * ОСНОВНОЙ ВЫЗЫВАЮЩЕЙ ПРОГРАММОЙ.
      CLC    0(4, 6), -F'0' * ИЗ ОДНОЙ ВЫЗЫВАЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ
      BE     CAL        * ЧЕРЕЗ ПОДПРОГРАММУ UNITE МОЖЕТ
      LA     5, 8(5)   * БЫТЬ ВЫЗВАНО ДО 10 РАЗЛИЧНЫХ
      LA     6, 4(6)   * ПОДПРОГРАММ.
      BCT   7, POISK   *
      WTO    'NUMBER OF SUBROUTINES IS MORE THAN 10', ROUTCDE=11
      ABEND  2000, , STEP
      DEL    LA         7, 10
      LA     5, NAMS
      DELMOD CLC        0(8, 5), -C' * 8 ПРОБЕЛОВ *
      BE     RT
      DELETE EPLOC={5}
      LA     5, 8(5)
      BCT   7, DELMOD
      B      RT
      CAL    LOAD      EPLOC={3}
      ST     0, 0(6)
      MVC    0(8, 5), NAME
      MET    L         15, 0(6)
      L      1, 24(4)
      LA     1, 4(1)
      BALR  14, 15
      RT     L         13, SOHR+4
      RETURN (14, 12)
      DS     18F
      NAME  DS         CL8
      NAMS  DC         10CLB'
      ADRS  DC         10F'0'
      ENO

```

```

SUBROUTINE RANDIC (NSTIM, KSUBJ, MDIM, STIM, SUBJ, IY, NVIOLM)
DIMENSION STIM (NSTIM, 1), SUBJ (KSUBJ, 1)
C ПОСТРОЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ СТАРТОВОЙ КОНФИГУРАЦИИ, ВЫЗОВ - ПРИ IСТУРЕ=2 ИЛИ KVMТУР=2
IF (NVIOLM EQ 1) PRINT 2, IY
2 FORMAT (' RANDOM INITIAL CONFIGURATION, INRAND=', I12)
DO 7 L=1, MDIM
DO 5 I=1, NSTIM
CALL URAND (RANNUM, IY)
5 STIM (I, L) = RANNUM
IF (KSUBJ EQ 0) GO TO 7
DO 6 J=1, KSUBJ
CALL URAND (RANNUM, IY)
6 SUBJ (J, L) = RANNUM
7 CONTINUE
RETURN
END

```

```

// * * * * * ПРИМЕРЫ ВХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ * * * * *
//GO FT05F001 DD • ОПИСЫВАЕТСЯ ПРОЦЕСС СЧЕТА
0002 MDIM-РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА (I4), <=10
0100 MAXST-МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ НА 1 ЛОКАЛЬНЫЙ МИНИМУМ (I4), <=500
0002 MAXVM-МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ПЕРЕХОДОВ К ПОИСКУ НОВОГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА (I4)
0000000000 TEMIN-МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ТЕТА ДЛЯ ОСТАНОВКИ СЧЕТА (F10.8)
0060 NSCOLMN-ЧИСЛО СИМВОЛОВ В СТРОКЕ КАРТИНКИ/2 (I4), <=60, ОБЫЧНО 60
0072 NLINE-ЧИСЛО СТРОК В КАРТИНКЕ (I4), (NSCOLMN-NLINE<5000); ОБЫЧНО 72
1 КАРТИЕ-СПОСОБ ОБРАБОТКИ СВЯЗЕЙ, 1 - ПЕРВЫЙ, 2 - ВТОРОЙ (I1)
1 IZGRAD-НЕ 0-ГРАДИЕНТ ПРОВЕРЯЕТСЯ НА МИНИМУМ (В NORGRA), 0-ПРОВЕРКИ НЕТ (I1)
1 IСТУРЕ-ТИП СТАРТОВОЙ КОНФИГУРАЦИИ, 1 - КРАСКАЛОВСКАЯ 2 - СЛУЧАЙНАЯ, 3 - ЧИТАТЬ ИЗ FT02
1256 INRAND-СЛУЧАЙНОЕ ЧИСЛО ОТ 0 ДО 9999 (I4)
1 KVMТУР-СПОСОБ ПЕРЕХОДА К ПОИСКУ СЛЕДУЮЩЕГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА (СМ ГОЛОВНУЮ ПР)
1 IPRINT-ПЕЧАТАЮТСЯ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ, 0 - НЕТ (I1)
0 LASTPR-0-ПЕЧАТАЮТСЯ ВСЕ МИНИМАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ, НЕ 0 - ТОЛЬКО ПОСЛЕДНЯЯ (I1)
1 IEXCL-ЕСЛИ НЕ 0, ТО ИЗ FT03 ВВОДИТСЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИСКЛЮЧАЕМЫХ ДАННЫХ (I1)
0 INDPIX-ЕСЛИ НЕ 0, ИЗ FT04 ВВОДИТСЯ ИНФОРМАЦИЯ О НЕСДВИГАЕМОЙ ЧАСТИ КОНФИГУРАЦИИ
1 MIFWAY-СПОСОБ ПОИСКА МИНИМУМА 1, 2 - ГРАДИЕНТНЫЙ, 1 - ШАГ ТЕТА, 2 - ПОСТ ШАГ, 3 - СОПР. ГР.
1 KRIST-ЕСЛИ 1, ТО КОНФИГУРАЦИЯ ВЫДАЕТСЯ В ВИДЕ ЧЕРТЕЖЕЙ (КАРТИНОК) (I1)
0 UNINTRA INTCAL (I1), NAMPRI (2A4) 1 - ВЫЗЫВАЕТСЯ ПОДПРОГРАММА ИНТЕРПРЕТАЦИИ, 0 - НЕТ
0020000000 STEPSZ-ВЕЛИЧИНА ШАГА ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ПРИ MIFWAY=2 (F10.8)
//GO FT03F001 DD • ПРИ IEXCL НЕ 0 ОПИСЫВАЕТ ИСКЛЮЧАЕМЫЕ ДАННЫЕ
0004 NSTIME-ЧИСЛО ИСКЛЮЧАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ, ЕСЛИ НЕ 0 ДАЛЕЕ СЛЕДУЕТ ИХ ИМЕНА (I4)
M N V W ИМЕНА ИСКЛЮЧАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ (20A4)
0000 KSUBJE-ЧИСЛО ИСКЛЮЧАЕМЫХ ЭКСПЕРТОВ, ЕСЛИ НЕ 0 ДАЛЕЕ СЛЕДУЮТ ИХ ИМЕНА (I4)
//GO FT04F001 DD • ПРИ INDPIX НЕ 0 ОПИСЫВАЕТ НЕСДВИГАЕМУЮ ЧАСТЬ
0008 NSTIMF-ЧИСЛО НЕСДВИГАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ, ЕСЛИ НЕ 0, ДАЛЕЕ СЛЕДУЮТ ИХ ИМЕНА (I4)
00 01 02 10 11 12 20 21 22 ИМЕНА НЕСДВИГАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ (20A4)
0000 KSUBJF-ЧИСЛО НЕСДВИГАЕМЫХ ЭКСПЕРТОВ, ЕСЛИ НЕ 0 ДАЛЕЕ СЛЕДУЮТ ИХ ИМЕНА (I4)
//GO FT02F001 DD • ПРИ IСТУРЕ=3-ВВОДИМАЯ КОНФИГУРАЦИЯ
(40F2.0) ФОРМАТ ВВОДА КОНФИГУРАЦИИ
00000100020100010101020200020102020 КООРДИНАТЫ ОБЪЕКТОВ
0815094567095534 КООРДИНАТЫ ЭКСПЕРТОВ
//GO FT01F001 DD • ОПИСАНИЕ ДАННЫХ (ШКАЛИРОВАНИЕ)
0008 KSUBJ-ЕСЛИ 0, ТО ШКАЛИРУЕТСЯ МАТРИЦА БЛИЗОСТИ-(I4)
0008 NSTIM-ЧИСЛО ОБЪЕКТОВ (I4); <=100 ФОРМАТ ВВОДА ДАННЫХ (13A4)
(40F2.0)
2 IPRINT 1-ДАННЫЕ О РАЗЛИЧИИ, 2-ДАННЫЕ О СХОДСТВЕ (I1)
-1 DATMIS-СИМВОЛ ПРОПУЩЕННЫХ ДАННЫХ (F4.0)
ТАБЛИЦА 5 В ДАННЫЕ О СМЕШЕНИИ БУКВ /TITLE-НАЗВАНИЕ ДАННЫХ (20A4) /
1 INDNAM-1-ИМЕНА ОБЪЕКТОВ ВВОДЯТСЯ, 0-ИМЕНА-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ НОМЕРА (I1)
B D P Q G M N V W ИМЕНА ОБЪЕКТОВ, ВВОДЯТСЯ ПРИ INDNAM=1 (20A4)
2315050502010100 ВВОДИМЫЕ ДАННЫЕ.
05101000010001 ВЕРХНЯЯ ПОЛОВИНА МАТРИЦЫ БЛИЗОСТИ ВВОДИТСЯ ПО СТРОКАМ
161501000100 В СООТВЕТСТВИИ СО СПИСКОМ В ПОДПРОГРАММЕ SCRDAT
2101020101 ПО ВВЕДЕННОМУ ВЫШЕ ФОРМАТУ ВВОДА ДАННЫХ
02020203
210515
1505
32
//GO FT01F001 DD • ОПИСАНИЕ ДАННЫХ (РАЗВЕРТЫВАНИЕ)
0006 KSUBJ-ЧИСЛО ЭКСПЕРТОВ (I4), <=200, KSUBJ*MDIM<=1000,
0008 NSTIM-ЧИСЛО ОБЪЕКТОВ (I4), <=200, NSTIM*MDIM<=1000, NSTIM*KSUBJ<=5000
(40F.0) ФОРМАТ ВВОДА ДАННЫХ (13A4)
0000 DATMIS-СИМВОЛ ПРОПУЩЕННЫХ ДАННЫХ (F4.0)
ТАБЛИЦА 7 10 ПРЕДПОЧТЕНИЯ ЦВЕТОВ /TITLE-НАЗВАНИЕ ДАННЫХ (20A4) /
0 INDNAM-0-ИМЕНА ОБЪЕКТОВ И ЭКСПЕРТОВ-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ НОМЕРА, 1-ИМЕНА ВВОДЯТСЯ
123432212343321234432123343212234321 ДАННЫЕ, ВВОДЯТСЯ ПО СПИСКУ В ПОДП. UNROAT
//• ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВВОДЯТСЯ ВСЕ NSTIM ОТВЕТОВ КАЖДОГО ИЗ KSUBJ ЭКСПЕРТОВ

```

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	10
Глава 1. Введение	13
Глава 2. Основные понятия матричной алгебры	22
Глава 3. Меры близости	47
Глава 4. Метрический метод Торгерсона	67
Глава 5. Неметрические методы	86
Глава 6. Модели индивидуальных различий	123
Глава 7. Модели предпочтения	152
Глава 8. Проверка априорных гипотез в многомерном шкалировании 188	
Глава 9. Многомерное шкалирование в сравнении с другими методами 204	
Литература	218
Дополнительная литература	226
Список символов	233
Приложение. Каменский В. С. Программа неметрического многомерного шкалирования PARSUN	237

Дэйвисон М.

Д94 Многомерное шкалирование: Методы наглядного представления данных / Пер. с англ. В. С. Каменского. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 254 с.: ил. — (Математико-статистические методы за рубежом).

ISBN 5—279—00276—3.

Книга американского ученого М. Дэйвисона посвящена многомерному шкалированию, которое находит широкое применение при анализе экспериментальных данных в экономике, технике, социологии и других областях. Вместе с кластерным и факторным анализом оно образует набор методов, позволяющих наглядно представить результаты в виде картинок или на экране дисплея.

Для научных работников, разработчиков алгоритмического и программного обеспечения обработки данных, преподавателей и студентов вузов.

Д $\frac{0702000000-003}{010(01)-88}$ 99—87

ББК 22.172